MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

„Die Legenden von Andor“ Optimale Gewinnstrategien mittels Simulation

Bachelorarbeit

Autor:	Kathrin Luckner
Matrikelnummer:	207223820
Datum:	20. Januar 2016
Betreuer:	Dr. Christian Roth *Arbeitsgruppe Optimierung und Stochastik* Prof. Dr. Wilfried Grecksch *Arbeitsgruppe Optimierung und Stochastik*

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich, Kathrin Luckner, die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst, erstmalig eingereicht und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Kathrin Luckner

Halle (Saale), 20. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Algorithmusverzeichnis

Symbolverzeichnis

B	Bogenschütze *(bowman)*
D	Zwerg *(dwarf)*
F	Krieger *(fighter)*
G	Gor
M	Zauberer *(magician)*
$p^k_{H,n:K,m}$	Wahrscheinlichkeit, dass der Held die k-te Kampfrunde gewinnt, wenn dem Helden n Würfel und der Kreatur m Würfel zur Verfügung stehen.
$P^r_{H:K}$	Wahrscheinlichkeit, dass der Held den Kampf in höchstens r Kampfrunden gewinnt.
$q^k_{H,n:K,m}$	Wahrscheinlichkeit, dass die Kreatur die k-te Kampfrunde gewinnt, wenn dem Helden n Würfel und der Kreatur m Würfel zur Verfügung stehen.
$Q^r_{H:K}$	Wahrscheinlichkeit, dass die Kreatur den Kampf in höchstens r Kampfrunden gewinnt.
S	Skral
$u^k_{H,n:K,m}$	Wahrscheinlichkeit, dass die k-te Kampfrunde mit einem Unentschieden beendet wird, wenn dem Helden n Würfel und der Kreatur m Würfel zur Verfügung stehen.
$U^r_{H:K}$	Wahrscheinlichkeit, dass der Kampf in höchstens r Kampfrunden ohne einen Gewinner beendet wird.
W	Wardrak
$X_{B,n}$	Würfelwert des Bogenschützen, wenn dem Bogenschützen n Würfel zur Verfügung stehen.
$X_{D,n}$	Würfelwert des Zwerges, wenn dem Zwerg n Würfel zur Verfügung stehen.
$X_{F,n}$	Würfelwert des Kriegers, wenn dem Krieger n Würfel zur Verfügung stehen.

$X_{M,1}$	Würfelwert des Zauberers, wenn dem Zauberer ein Würfel zur Verfügung steht.
$Y_{G,2}$	Würfelwert des Gors, wenn dem Gor zwei Würfel zur Verfügung stehen.
$Y_{S,2}$	Würfelwert des Skrals, wenn dem Skral zwei Würfel zur Verfügung stehen.
$Y_{W,m}$	Würfelwert des Wardraks, wenn dem Wardrak m Wardrak-Würfel zur Verfügung stehen.
$Z^k_{H,n:K,m}$	Differenz der Kampfwerte des Helden H und der Kreatur K in der k-ten Kampfrunde, wenn dem Helden n Würfel und der Kreatur m Würfel zur Verfügung stehen.

1 Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist das kooperative Brettspiel „Die Legenden von Andor“. Die Besonderheit eines kooperativen Spieles besteht darin, dass die Spieler nicht gegeneinander spielen, sondern gemeinsam gegen das Spiel.

Das Spiel besteht aus mehreren Legenden, die sich durch veränderte Ausgangssituationen unterscheiden. Die Legenden sind eigenständige Spiele in denen legendenabhängige Aufgaben gelöst werden müssen. Bestandteil dieser Arbeit ist die Legende 2 in der Zweispielervariante, auf die wir unsere weiteren Betrachtungen beziehen.

Ziel dieser Arbeit ist es, sinnvolle Verhaltensregeln aufzustellen und erste Erkenntnisse über die Spielabläufe zu erhalten, um so eine Grundlage für spätere Betrachtungen zu schaffen, in denen die optimalen Verhaltensregeln in Bezug auf die Gewinnmaximierung des Spieles ermittelt werden.

Neben der Aufstellung der Verhaltensregeln werden wir unter anderem auf die Frage eingehen, ob eine Spielfigur bzw. eine Kombination aus Spielfiguren existiert, deren Gewinnaussichten höher sind als die der anderen. Die Frage bezüglich der Existenz einer Spielfigur bzw. Kombination aus Spielfiguren mit höheren Gewinnchancen, beruht auf den unterschiedlichen Fähigkeiten der Spielfiguren, die auch als Helden bezeichnet werden.

Im nachfolgenden Kapitel 2 werden wir als erstes eine Einführung in die Spielregeln geben.

Einen wesentlichen Bestandteil des Spieles, den Kampf zwischen einem Helden und einer Kreatur, werden wir in den Kapiteln 3 bis 6 mit Hilfe der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachten. Hierfür werden wir in Kapitel 3 die Verteilungen der Würfelwerte der Helden ermitteln und in Kapitel 4 die Verteilungen der Würfelwerte der Kreaturen. Mit diesen werden wir dann in Kapitel 5 ein Modell eines Kampfes aufstellen, mit dem wir die Gewinnwahrscheinlichkeiten einer Kampfrunde und eines Kampfes bestimmen können.

Im sechsten Kapitel werten wir die ermittelten Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes bezüglich des Einflusses der Anfangsbedingungen aus. Des Weiteren stellen wir die Ausgangssituationen auf unter denen ein Held einen Kampf sicher gewinnt oder verliert. Auch betrachten wir unter welchen Bedingungen ein Held im Kampf besser geeignet ist als ein anderer.

Bestandteil unserer weiteren Untersuchungen werden die Gewinnwahrscheinlichkeiten des Spieles für die Zweispielervariante sein.

Aufgrund der Komplexität der Spielabläufe sind die Methoden der Spieltheorie schwer umsetzbar, so dass die weiteren Untersuchungen basierend auf Simulationen durchgeführt werden.

Um in der Simulation die Bewegung der Kreaturen und der Helden nachzubilden, überführen wir in Kapitel 7 das Spielbrett in einen ungerichteten Graphen für die Bewegungsmöglichkeiten der Helden und in einen gerichteten Graphen für die Bewegungsvorschrift der Kreaturen.

Die Implementierung einzelner Spielabläufe in der Simulation werden wir in Kapitel 8 betrachten. Für die Implementierung der Simulation wird die Skriptsprache von GNU Octave[1] verwendet, die überwiegend kompatibel mit der Skriptsprache von MATLAB[2] ist.

Die durch die Simulation generierten Stichproben bezüglich des diskreten Merkmales, die Dauer des Spieles, werden wir mit Hilfe der Methoden der beschreibenden Statistik in Kapitel 9 untersuchen. Hierbei werden wir die Auswirkungen der Wahl der Helden auf den Spielverlauf betrachten sowie die des Zeitpunktes an dem die Runensteinkarte ausgelöst wird, indem wir das arithmetische Mittel bezüglich der Spieldauer aufstellen sowie die relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele.

Im letzten Kapitel 10 werden wir einen Ausblick auf weitere Betrachtungsmöglichkeiten geben und auf mögliche Lösungsansätze eingehen, die unter anderem auf gesteuerten Markov-Ketten basieren.

[1] http://www.gnu.org/software/octave/
[2] http://de.mathworks.com/products/matlab/index.html

2 Spieleinführung

Das Grundspiel „Die Legenden von Andor“ kann mit zwei bis vier Spielern gespielt werden. Jeder Spieler wählt eine Heldenfigur aus, wobei jeder Held nur einmal verwendet werden darf. Es wird zwischen vier Heldentypen mit ihren Fähigkeiten unterschieden: dem Zwerg, dem Krieger, dem Zauberer und dem Bogenschützen.

Die ausgewählten Heldenfiguren werden auf das Spielbrett gesetzt, das aus 78 Spielfeldern besteht, die von 0 bis 72 und von 80 bis 84 durchnummeriert sind. Die Anfangspositionen der Helden sind durch die Spielregeln und den Heldentyp festgelegt. Der Zwerg wird auf das Feld 7 gestellt, der Krieger auf das Feld 14, der Zauberer auf das Feld 34 und der Bogenschütze auf das Feld 25.

Neben den Helden werden ihre Gegner, die Kreaturen, auf das Spielbrett gesetzt. Die Kreaturen sind in vier Klassen unterteilt: Gors, Skrale, Trolle und Wardraks. Zu Beginn des Spieles werden fünf Gors auf die Spielfelder 8, 20, 21, 26 und 48 gestellt und ein Skral auf das Spielfeld 19.

Die Spielzeit ist durch die Tagesleiste und die Legendenleiste begrenzt.

Auf der Tagesleiste werden die Stunden eines Tages gezählt. Ein Tag besteht regulär aus sieben Stunden, es können aber auch drei Überstunden in Anspruch genommen werden.

Die Legendenleiste ist die globale Zeitachse des Spieles und besteht aus vierzehn Feldern (A bis N). Ein Feld auf der Legendenleiste steht für einen Tag. Die Felder lösen Ereignisse im Spiel aus, unter anderem das Einsetzen weiterer Kreaturen. Zur Markierung wird eine Spielfigur verwendet, die auch Erzähler genannt wird. Der Erzähler wird zu Beginn des Spieles auf das Feld A der Legendenleiste gesetzt. Das Spiel ist beendet, wenn der Erzähler das Feld N der Legendenleiste erreicht hat.

Haben alle Spieler ihren Tag beendet, werden zuerst die Kreaturen bewegt und dann wird der Erzähler ein Feld auf der Legendenleiste weitergesetzt.

In welches benachbarte Spielfeld eine Kreatur gesetzt wird, ist durch einen Pfeil gekennzeichnet, der in die Spielfelder eingezeichnet ist. Zuerst werden die Gors bewegt, danach die Skrale, dann die Wardraks, auf die dann die Trolle folgen und abschließend noch einmal die Wardraks. Bei der Bewegung der einzelnen Klassen der Kreaturen wird zuerst die Kreatur, deren Position auf dem Spielbrett am niedrigsten ist, weitergesetzt. Die Richtung der Bewegung der Kreaturen führt zur Burg, die sich auf dem Spielfeld 0 befindet und in der auch der Weg einer Kreatur endet.

Bei der Bewegung der Kreaturen muss beachtet werden, dass sich nur eine Kreatur auf einem Spielfeld befinden darf. Wird eine Kreatur nach ihrer Laufvorschrift auf ein Spielfeld gesetzt, auf dem sich bereits eine Kreatur befindet, wird sie solange weiterbewegt bis sie ein freies Spielfeld oder die Burg erreicht hat.

Die Anzahl der Kreaturen, die in die Burg gelangen dürfen, ist begrenzt und abhängig von der Anzahl der Spieler. Wird das Spiel mit vier Spielern gespielt darf nur eine Kreatur in die Burg gelangen, bei drei Spielern zwei und bei zwei Spielern drei. Das Spiel ist verloren, sobald eine Kreatur in die Burg gelangt und keiner der von der Spieleranzahl abhängigen Plätze mehr frei ist.

Damit ist das Hauptziel des Spieles die Kreaturen am Eindringen in die Burg zu hindern, bis der Erzähler das Legendenfeld N erreicht hat. Wurde das Hauptziel erfüllt, haben die Spieler das Spiel gewonnen. Neben dem Hauptziel müssen die Helden noch weitere legendenabhängige Aufgaben lösen, die aber erst einmal nicht Bestandteil der Betrachtungen dieser Arbeit sind.

Weitere Kreaturen werden beim Erreichen der Legendenfelder C und G auf das Spielbrett gesetzt. Erreicht der Erzähler das Legendenfeld C, werden zwei weitere Gors auf die Felder 27 und 31 gestellt und ein weiterer Skral auf das Feld 29. Wird das Legendenfeld G ausgelöst, werden zwei Wardraks auf die Felder 26 und 27 gestellt.

Neben den beiden festen Zeitpunkten, an denen weitere Kreaturen ins Spiel kommen, wird zu Beginn des Spieles ein weiterer Zeitpunkt zufällig bestimmt. Hierfür wird ein sechsseitiger, idealer Würfel (W6) geworfen. Ist das erzielte Wurfergebnis eine Eins werden die weiteren Kreaturen beim Erreichen des Legendenfeldes B eingesetzt, bei einer Zwei beim Legendenfeld D, bei einer Drei beim Legendenfeld E, bei einer Vier oder Fünf beim Legendenfeld F und bei einer Sechs beim Legendenfeld H. Zum ermittelten Zeitpunkt werden dann zwei weitere Gors auf die Spielfelder 43 und 32 gesetzt und ein weiterer Skral auf das Spielfeld 39. Das Einsetzen der Kreaturen zu diesem zufällig bestimmten Zeitpunkt erfolgt durch die Auslösung der Runensteinkarte. Die weiteren Ereignisse, die durch die Runensteinkarte im Spielverlauf ausgelöst werden, sind erst einmal nicht Bestandteil unserer Betrachtungen.

Beim Einsetzen der Kreaturen ist genau wie bei der Bewegung der Kreaturen zu beachten, dass sich nur eine Kreatur auf einem Spielfeld befinden darf. Soll eine Kreatur auf ein Spielfeld eingesetzt werden, auf dem bereits eine Kreatur steht, wird solange nach einer neuen Position gesucht bis ein freies Spielfeld gefunden ist oder die Kreatur direkt auf die Burg gesetzt wird.

Die Lebensenergie eines Helden ist durch seine Willenspunkte festgelegt und seine Kraft durch seine Stärkepunkte. Die Anzahl der Willenspunkte eines Helden ist auf zwanzig begrenzt und die Anzahl der Stärkepunkte auf vierzehn. Zu Beginn des Spieles erhält jeder Held als Anfangsausstattung sieben Willenspunkte und zwei Stärkepunkte.

Des Weiteren werden fünf Goldstücke auf die Gruppe der Spieler frei verteilt. Mit den Goldstücken können die Helden im Spielverlauf ihre Stärkepunkte auf den Spielfeldern 18, 57, und 71 erhöhen. Diese Spielfelder werden auch als Händlerfeld bezeichnet. Erreicht ein Held ein Händlerfeld kann er zwei Goldstücke gegen einen

Stärkepunkt tauschen. Ausnahme ist die Spielfigur Zwerg, die auf dem Händlerfeld 71 einen Stärkepunkt für nur ein Goldstück erwerben kann.

Auch haben die Helden die Möglichkeit ihre Willenspunkte im Spielverlauf zu erhöhen, dies ist auf den Spielfeldern 5, 35, 45 und 55 möglich. Diese Spielfelder werden auch Brunnenfelder genannt. Erreicht ein Held ein Brunnenfeld, werden seine Willenspunkte um drei erhöht. Ausnahme ist die Spielfigur Krieger, die auf einem Brunnenfeld fünf Willenspunkte erhält. Wertet ein Held auf einem Brunnenfeld seine Willenspunkte auf, dann ist auf diesem Brunnenfeld erst wieder eine Aufwertung der Willenspunkte möglich, wenn alle Helden ihren Tag beendet haben bzw. nach der nächsten Bewegung der Kreaturen.

Ein Spielzug besteht entweder aus der Aktion Laufen oder Kämpfen. Die Ausführung einer Aktion kostet den Helden Zeit.

Hat ein Spieler eine Aktion ausgeführt, ist der nächste Spieler an der Reihe. Am ersten Tag führt der Spieler, dessen Anfangsposition auf dem Spielbrett die niedrigste ist, zuerst eine Aktion durch. Die erste Aktion der weiteren Tage führt der Spieler aus, der den vorherigen Tag zuerst beendet hat. Er muss damit aber warten bis auch alle anderen Spieler ihren Tag beendet haben.

Bei der Ausführung der Aktion Laufen kann sich der Held frei von einem Spielfeld in benachbarte Spielfelder bewegen. Jedes Feld, das ein Held betritt, kostet ihm eine Stunde auf der Tagesleiste. Damit ist seine Bewegung zeitlich durch die Tagesleiste begrenzt. Er kann aber auch schon früher seine Bewegung unterbrechen, z.B. wenn er eine Kreatur erreicht.

Die Aktion Kämpfen kann der Spieler ausführen, wenn sich seine Heldenfigur mit einer Kreatur im selbem Spielfeld befindet. Wurde als Spielfigur der Bogenschütze gewählt, ist es auch möglich eine Kreatur in einem benachbarten Spielfeld anzugreifen. Ein Kampf zwischen einer Kreatur und einem Helden wird nur durch den Helden ausgelöst. Damit ist es auch möglich ein Spielfeld zu betreten, auf dem eine Kreatur steht, ohne das ein Kampf stattfindet.

Ein Kampf besteht aus mindestens einer Kampfrunde. Die Anzahl der Kampfrunden ist durch die Stunden auf der Tagesleiste begrenzt. Jede Kampfrunde kostet den Helden eine Stunde auf der Tagesleiste. Wir treffen für die weiteren Betrachtungen die Annahme, dass die Spieler keine Überstunden in Anspruch nehmen, da eine Überstunde den Spieler jeweils zwei Willenspunkte kostet. Aus den nächsten Kapiteln können wir schließen, dass diese Annahme sinnvoll ist, da mit einer höheren Anzahl an Willenspunkten die Gewinnwahrscheinlichkeiten des Helden für einen Kampf steigen. Damit besteht ein Kampf aus maximal sieben Kampfrunden.

In einer Kampfrunde werden unabhängig voneinander der Würfelwert des Helden und der der Kreatur ermittelt. Hierfür wird jeweils für den Helden und die Kreatur ein Würfelspiel durchgeführt, das entsprechend ihrer Fähigkeiten unterschiedlichen Regeln unterliegt. Danach wird der Kampfwert des Helden und der der Kreatur bestimmt. Der Kampfwert ist die Summe des ermittelten Würfelwertes und seiner Stärkepunkte.

Der Held hat die Kampfrunde gewonnen, wenn er einen höheren Kampfwert erzielt als die Kreatur und die Kreatur hat die Kampfrunde gewonnen, wenn sie einen höheren Kampfwert erzielt als der Held. Erzielen beide einen gleichen Kampfwert, wird die Kampfrunde mit einem Unentschieden beendet.

Anschließend wird der Betrag der Differenz der Kampfwerte gebildet und von den Willenspunkten des Verlierers abgezogen. Ist eine Kampfrunde mit einem Unentschieden beendet wurden, verlieren der Held und die Kreatur keine Willenspunkte.

Der Kampf wird solange fortgesetzt, bis der Held oder die Kreatur keine Willenspunkte mehr besitzt oder der Held seinen Tag beendet hat. Wer zuerst keine Willenspunkte mehr besitzt, ist der Verlierer des Kampfes.

Wurde der Kampf vom Helden gewonnen, wird die Kreatur aus dem Spiel genommen und der Erzähler ein Feld auf der Legendenleiste weitergesetzt, wobei die Stunden der Helden auf der Tagesleiste dadurch nicht verändert werden. Des Weiteren erhält der Held eine Belohnung, die entweder aus zwei Goldstücken, zwei Willenspunkten oder einem Goldstück und einem Willenspunkt besteht.

Wird der Kampf durch einen Sieg der Kreatur beendet, werden die bereits verlorenen Willenspunkte der Kreatur wieder aufgefüllt und der Held verliert einen Stärkepunkt, wenn er mehr als einen Stärkepunkt besitzt. Außerdem erhält der Held drei Willenspunkte. Für den Fall, dass der Held nur einen Stärkepunkt besitzt, erhält er nach den Spielregeln trotzdem drei Willenspunkte, muss aber keinen Stärkepunkt abgeben.

Wurde der Kampf ohne einen Sieger beendet, werden nur die bereits verloren Willenspunkte der Kreatur wieder aufgefüllt.

Neben der alleinigen Durchführung eines Kampfes ist auch ein Mehrspieler-Kampf möglich. Bei dem sich Helden zu einer Gruppe zusammenschließen können, für die dann ein gemeinsamer Kampfwert ermittelt wird. Der gemeinsame Kampfwert ist die Summe der Würfelwerte und Stärkepunkte aller am Kampf beteiligten Helden. In dieser Arbeit werden wir erst einmal nur auf den Einspieler-Kampf eingehen.

Weitere Bestandteile des Spieles, wie z.B. die Ausrüstungsgegenstände, die unter anderem Einfluss auf die Würfelwerte der Helden haben, Prinz Thorald, mit dem der Kampfwert des Helden erhöht werden kann oder die Bauernplättchen, mit denen die Anzahl der freien Plätze auf der Burg erhöht werden, sind nicht Bestandteil unserer Betrachtungen.

3 Würfelwerte der Helden

Für die Ermittlung des Würfelwertes eines Helden wird ein Würfelspiel mit n sechsseitigen, idealen Würfeln (W6) durchgeführt. Das Würfelspiel unterliegt für jeden Heldentypen unterschiedlichen Spielregeln in Bezug auf die Anzahl der zur Verfügung stehenden Würfel n und die Fähigkeiten der Helden, die an den entsprechenden Stellen erläutert werden.

In diesem Kapitel betrachten wir die jeweiligen Würfelspiele als Zufallsexperimente und führen die Würfelwerte der Helden für die vier Charaktere als Zufallsgrößen ein und ermitteln ihre Einzelwahrscheinlichkeiten.

Den **Würfelwurf eines Helden** mit n Würfeln beschreiben wir durch die Ergebnismenge

$$\Omega^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1, \ldots, 6\}\},$$

wobei x_j mit $j \in \{1, \ldots, n\}$ die erzielte Augenzahl des j-ten Würfels bezeichnet.

Die 6^n Elementarereignisse $\omega_1, \ldots, \omega_{6^n}$ sind gleichwahrscheinlich, da das Zufallsexperiment mit n idealen Würfeln durchgeführt wird. Damit können wir das Laplace-Modell anwenden und die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse mit $P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_{6^n}\}) = \frac{1}{6^n}$ angeben.

Definition 3.1 (Symbole der Helden)**.** Für die Charaktere der Helden definieren wir die folgenden Symbole. Wir bezeichnen

- den Zwerg *(dwarf)* mit D,
- den Krieger *(fighter)* mit F,
- den Zauberer *(magician)* mit M und
- den Bogenschützen *(bowman)* mit B.

Definition 3.2 (Willenspunkte der Helden)**.** Sei $H \in \{D, F, M, B\}$ ein Held. Wir bezeichnen $W_H = \{0, 1, \ldots, 20\}$ als die Menge der Willenspunkte des Helden H und $w_H \in W_H$ als die Anzahl der aktuellen Willenspunkte des Helden H.

3.1 Würfelwert des Zwerges

Der Spieler mit der Spielfigur Zwerg verwendet in einem Kampf gegen eine Kreatur entweder einen, zwei oder drei sechsseitige, ideale Würfel (W6). Dabei ist die Anzahl der gleichzeitig geworfenen Würfel abhängig von der Anzahl der aktuellen

Willenspunkte des Zwerges $w_D \in W_D$. Nach den Spielregeln ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden Würfel des Zwerges definiert mit

$$n = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \ 0 \leq w_D \leq \ 6, \\ 2, & \text{wenn } \ 7 \leq w_D \leq 13, \\ 3, & \text{wenn } 14 \leq w_D \leq 20. \end{cases}$$

Wir betrachten also drei verschiedene zufällige Versuche mit ihren Ergebnismengen Ω^n für die Bestimmung des Würfelwertes des Zwerges.

Definition 3.3 (Würfelwert des Zwerges)**.** Der *Würfelwert des Zwerges* $X_{D,n}$ ist die höchste Augenzahl der geworfenen Würfel.

1. Bei einem **Würfelwurf mit einem Würfel** ist der Würfelwert des Zwerges definiert mit

$$X_{D,1}(\omega) = x_1,$$

wobei $\omega \in \Omega$.

2. Bei einem **Würfelwurf mit zwei Würfeln** ist der Würfelwert des Zwerges definiert mit

$$X_{D,2}(\omega) = \begin{cases} x_1, & \text{wenn } x_2 \leq x_1, \\ x_2, & \text{wenn } x_1 < x_2, \end{cases}$$

wobei $\omega \in \Omega^2$.

3. Bei einem **Würfelwurf mit drei Würfeln** ist der Würfelwert des Zwerges definiert mit

$$X_{D,3}(\omega) = \begin{cases} x_1, & \text{wenn } (x_2 \leq x_1) \wedge (x_3 \leq x_1), \\ x_2, & \text{wenn } (x_1 < x_2) \wedge (x_3 \leq x_2), \\ x_3, & \text{wenn } (x_1 < x_3) \wedge (x_2 < x_3), \end{cases}$$

wobei $\omega \in \Omega^3$.

Bemerkung 3.4. Die Abbildung $X_{D,n} \colon \Omega^n \to \mathbb{N}$ ist eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}$.

Bemerkung 3.5 (Bild von Ω^n unter $X_{D,n}$)**.** Sei $X_{D,n}$ eine Abbildung von Ω^n nach $\mathbb{N}$, dann bezeichnet die Menge $X_{D,n}(\Omega^n) = \{X_{D,n}(\omega) : \omega \in \Omega^n\} = \{1, \ldots, 6\}$ das Bild von Ω^n unter $X_{D,n}$.

Satz 3.6 (Einzelwahrscheinlichkeiten von $X_{D,n}$)**.** Sei $(\Omega^n, \mathfrak{F})$ ein messbarer Raum und $\mathfrak{F} = 2^{\Omega^n}$ ein Ereignisfeld. Sei des Weiteren das Tripel $(\Omega^n, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P \colon \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$.

Die diskrete Zufallsgröße $X_{D,n}$ ist durch die Einzelwahrscheinlichkeiten aus Tabelle 3.1 beschrieben.

	$n=1$ $0 \leq w_D \leq 6$	$n=2$ $7 \leq w_D \leq 13$	$n=3$ $14 \leq w_D \leq 20$
$p_1 := P(\{X_{D,n}=1\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{216}$
$p_2 := P(\{X_{D,n}=2\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{7}{216}$
$p_3 := P(\{X_{D,n}=3\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{19}{216}$
$p_4 := P(\{X_{D,n}=4\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{37}{216}$
$p_5 := P(\{X_{D,n}=5\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{61}{216}$
$p_6 := P(\{X_{D,n}=6\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{91}{216}$
$\sum$	1	1	1

Tabelle 3.1: Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $X_{D,n}$

Beweis von Satz 3.6.

Sei $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

(i) Für $0 \leq w_D \leq 6$ und damit $n = 1$ gilt

$$p_i = P(\{X_{D,1} = i\}) = P(\{\omega \in \Omega : X_{D,1}(\omega) = i\}) = P(\{x_1 \in \Omega : x_1 = i\}).$$

Nach Anwendung der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace erhalten wir

$$p_i = \frac{|\{x_1 \in \Omega : x_1 = i\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}.$$

(ii) Sei $7 \leq w_D \leq 13$ und damit $n = 2$, dann erhalten wir mit Definition 3.3

$$p_i = P(\{(i, x_2) \in \Omega^2 : x_2 \leq i\} \cup \{(x_1, i) \in \Omega^2 : x_1 < i\}).$$

Da die Ereignisse paarweise disjunkt sind, folgt aus den Axiomen von Kolmogorow

$$p_i = P(\{(i, x_2) \in \Omega^2 : x_2 \leq i\}) + P(\{(x_1, i) \in \Omega^2 : x_1 < i\}).$$

Mit Hilfe der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace erhalten wir

$$p_i = \frac{|\{(i, x_2) \in \Omega^2 : x_2 \leq i\}|}{|\Omega^2|} + \frac{|\{(x_1, i) \in \Omega^2 : x_1 < i\}|}{|\Omega^2|} = \frac{2i-1}{36}.$$

(iii) Sei $14 \leq w_D \leq 20$ und damit $n = 3$.

Mit Definition 3.3 können wir die Einzelwahrscheinlichkeiten für diesen Fall mit

$$\begin{aligned} p_i = P(&\{(i,x_2,x_3) \in \Omega^3 : x_2 \leq i,\ x_3 \leq i\} \cup \{(x_1,i,x_3) \in \Omega^3 : x_1 < i,\ x_3 \leq i\} \\ &\cup \{(x_1,x_2,i) \in \Omega^3 : x_1 < i,\ x_2 < i\}) \end{aligned}$$

angeben.

Wir können nun den Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} p_i = &P(\{(i,x_2,x_3) \in \Omega^3 : x_2 \leq i,\ x_3 \leq i\}) + P(\{(x_1,i,x_3) \in \Omega^3 : x_1 < i,\ x_3 \leq i\}) \\ &+P(\{(x_1,x_2,i) \in \Omega^3 : x_1 < i,\ x_2 < i\}), \end{aligned}$$

da die Ereignisse disjunkt sind.

Aus der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace folgt

$$p_i = \frac{1 \cdot i \cdot i + (i-1) \cdot 1 \cdot i + (i-1) \cdot (i-1) \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{3i^2 - 3i + 1}{216}.$$

□

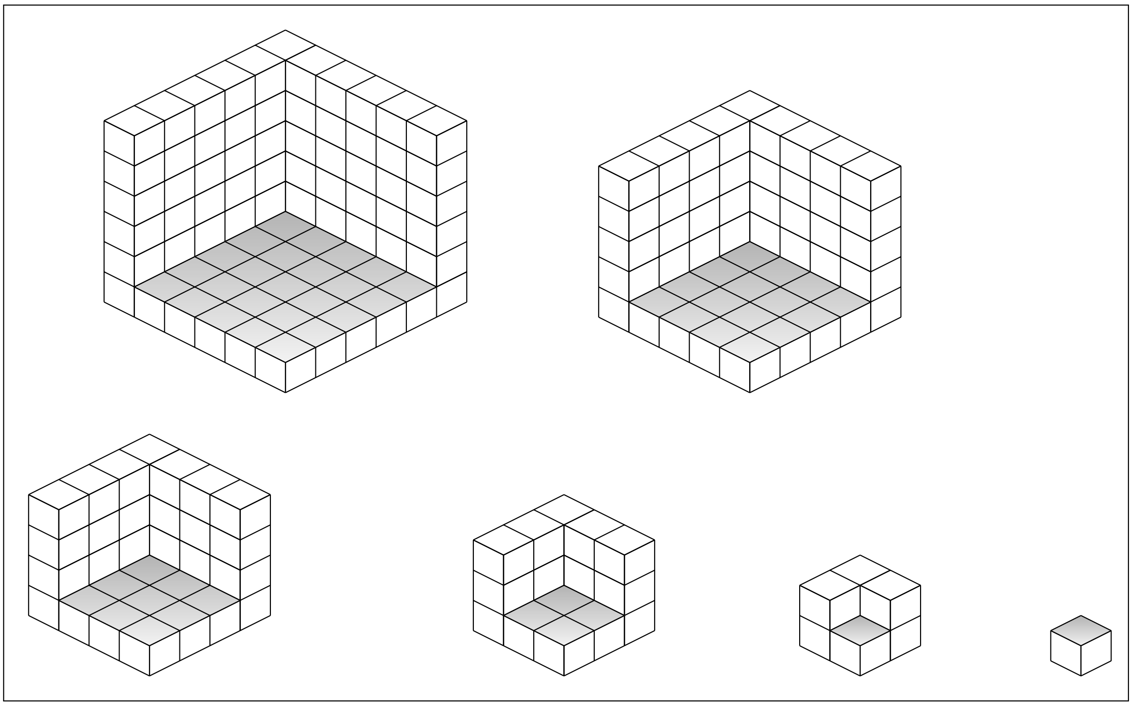

Abbildung 3.1: $X_{D,3}$ – Würfelwert des Zwerges für $n = 3$

3.2 Würfelwert des Kriegers

Dem Spieler mit der Spielfigur Krieger stehen während eines Kampfes zwei, drei oder vier sechsseitige, ideale Würfel (W6) zur Verfügung. Dabei ist die Anzahl der aktuellen Willenspunkte des Kriegers $w_F \in W_F$ ausschlaggebend für die Anzahl der gleichzeitig geworfenen Würfel, die definiert ist durch

$$n = \begin{cases} 2, & \text{wenn } \ 0 \leq w_F \leq \ 6, \\ 3, & \text{wenn } \ 7 \leq w_F \leq 13, \\ 4, & \text{wenn } 14 \leq w_F \leq 20. \end{cases}$$

Definition 3.7 (Würfelwert des Kriegers)**.** Der *Würfelwert des Kriegers* $X_{F,n}$ ist die höchste Augenzahl der geworfenen Würfel.

1. Bei einem **Würfelwurf mit zwei Würfeln** ist der Würfelwert des Kriegers definiert mit

$$X_{F,2}(\omega) = \begin{cases} x_1, & \text{wenn } x_2 \leq x_1, \\ x_2, & \text{wenn } x_1 < x_2, \end{cases}$$

wobei $\omega \in \Omega^2$.

2. Werden bei einem **Würfelwurf drei Würfel** verwendet, ist der Würfelwert des Kriegers definiert mit

$$X_{F,3}(\omega) = \begin{cases} x_1, & \text{wenn } (x_2 \leq x_1) \wedge (x_3 \leq x_1), \\ x_2, & \text{wenn } (x_1 < x_2) \wedge (x_3 \leq x_2), \\ x_3, & \text{wenn } (x_1 < x_3) \wedge (x_2 < x_3), \end{cases}$$

wobei $\omega \in \Omega^3$.

3. Bei einem **Würfelwurf mit vier Würfeln** ist der Würfelwert des Kriegers definiert mit

$$X_{F,4}(\omega) = \begin{cases} x_1, & \text{wenn } (x_2 \leq x_1) \wedge (x_3 \leq x_1) \wedge (x_4 \leq x_1), \\ x_2, & \text{wenn } (x_1 < x_2) \wedge (x_3 \leq x_2) \wedge (x_4 \leq x_2), \\ x_3, & \text{wenn } (x_1 < x_3) \wedge (x_2 < x_3) \wedge (x_4 \leq x_3), \\ x_4, & \text{wenn } (x_1 < x_4) \wedge (x_2 < x_4) \wedge (x_3 < x_4), \end{cases}$$

wobei $\omega \in \Omega^4$.

Bemerkung 3.8. Die Abbildung $X_{F,n} \colon \Omega^n \to \mathbb{N}$ ist eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}$.

Bemerkung 3.9 (Bild von Ω^n unter $X_{F,n}$)**.** Sei $X_{F,n}$ eine Abbildung von Ω^n nach $\mathbb{N}$, dann bezeichnet die Menge $X_{F,n}(\Omega^n) = \{X_{F,n}(\omega) : \omega \in \Omega^n\} = \{1, \ldots, 6\}$ das Bild von Ω^n unter $X_{F,n}$.

Satz 3.10 (Einzelwahrscheinlichkeiten von $X_{F,n}$)**.** Sei das Tripel $(\Omega^n, 2^{\Omega^n}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P \colon 2^{\Omega^n} \to \mathbb{R}$.

Die diskrete Zufallsgröße $X_{F,n}$ ist durch die Einzelwahrscheinlichkeiten aus Tabelle 3.2 beschrieben.

	$n=2$ $0 \leq w_F \leq 6$	$n=3$ $7 \leq w_F \leq 13$	$n=4$ $14 \leq w_F \leq 20$
$p_1 := P(\{X_{F,n} = 1\})$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{1.296}$
$p_2 := P(\{X_{F,n} = 2\})$	$\frac{3}{36}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{15}{1.296}$
$p_3 := P(\{X_{F,n} = 3\})$	$\frac{5}{36}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{65}{1.296}$
$p_4 := P(\{X_{F,n} = 4\})$	$\frac{7}{36}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{175}{1.296}$
$p_5 := P(\{X_{F,n} = 5\})$	$\frac{9}{36}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{369}{1.296}$
$p_6 := P(\{X_{F,n} = 6\})$	$\frac{11}{36}$	$\frac{91}{216}$	$\frac{671}{1.296}$
$\sum$	1	1	1

Tabelle 3.2: Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $X_{F,n}$

Beweis von Satz 3.10.

Es bleibt nur noch der Fall $n = 4$ zu zeigen, da die Herleitung der Einzelwahrscheinlichkeiten für die anderen beiden Fälle identisch mit Teil *(ii)* und *(iii)* des Beweises von Satz 3.6 ist.

Sei $14 \leq w_F \leq 20$ und damit $n = 4$.

Für $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ und $p_i = P(\{\omega \in \Omega^4 : X_{F,4}(\omega) = i\})$ erhalten wir mit Definition 3.7

$$\begin{aligned} p_i = P(&\{(i, x_2, x_3, x_4) \in \Omega^4 : (x_2 \leq i) \wedge (x_3 \leq i) \wedge (x_4 \leq i)\} \\ &\cup \{(x_1, i, x_3, x_4) \in \Omega^4 : (x_1 < i) \wedge (x_3 \leq i) \wedge (x_4 \leq i)\} \\ &\cup \{(x_1, x_2, i, x_4) \in \Omega^4 : (x_1 < i) \wedge (x_2 < i) \wedge (x_4 \leq i)\} \\ &\cup \{(x_1, x_2, x_3, i) \in \Omega^4 : (x_1 < i) \wedge (x_2 < i) \wedge (x_3 < i)\}). \end{aligned}$$

Da die Ereignisse disjunkt sind, folgt aus dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_i = &P(\{(i, x_2, x_3, x_4) \in \Omega^4 : (x_2 \leq i) \wedge (x_3 \leq i) \wedge (x_4 \leq i)\}) \\ &+P(\{(x_1, i, x_3, x_4) \in \Omega^4 : (x_1 < i) \wedge (x_3 \leq i) \wedge (x_4 \leq i)\}) \\ &+P(\{(x_1, x_2, i, x_4) \in \Omega^4 : (x_1 < i) \wedge (x_2 < i) \wedge (x_4 \leq i)\}) \\ &+P(\{(x_1, x_2, x_3, i) \in \Omega^4 : (x_1 < i) \wedge (x_2 < i) \wedge (x_3 < i)\}). \end{aligned}$$

Mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace erhalten wir

$$p_i = \frac{i^3 + (i-1) \cdot i^2 + (i-1)^2 \cdot i + (i-1)^3}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{4i^3 - 6i^2 + 4i - 1}{1.296}.$$

$\square$

3.3 Würfelwert des Zauberers

Der Spieler mit der Spielfigur Zauberer kann in einem Kampf, unabhängig von der Anzahl der aktuellen Willenspunkte des Zauberers, nur einen sechsseitigen, idealen Würfel (W6) verwenden.

Er kann aber die **Fähigkeit des Zauberers** nutzen und nach dem einfachen Würfelwurf den Würfel auf die gegenüberliegende Würfelseite drehen.

Wenn wir von einem rational denkenden Spieler ausgehen, wird der Spieler immer den Würfel auf die gegenüberliegende Würfelseite drehen, wenn die Augenzahl auf der gegenüberliegenden Seite größer ist als die erzielte Augenzahl.

Mit der Fähigkeit des Zauberers und der Annahme eines rational denkenden Spielers können wir nun die Definition des Würfelwertes des Zauberers angeben.

Definition 3.11 (Würfelwert des Zauberers)**.** Ist $X_{M,1} \colon \Omega \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit

$$X_{M,1}(\omega) = \begin{cases} 7 - x_1, & \text{wenn } x_1 \in \{1,2,3\}, \\ x_1, & \text{wenn } x_1 \in \{4,5,6\}, \end{cases}$$

und $\omega \in \Omega$, so bezeichnen wir $X_{M,1}$ als *Würfelwert des Zauberers.*

Bemerkung 3.12. Die Abbildung $X_{M,1} \colon \Omega \to \mathbb{N}$ ist eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}$.

Bemerkung 3.13 (Bild von Ω unter $X_{M,1}$)**.** Sei $X_{M,1}$ eine Abbildung von Ω nach $\mathbb{N}$, dann bezeichnet die Menge $X_{M,1}(\Omega) = \{X_{M,1}(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{4,5,6\}$ das Bild von Ω unter $X_{M,1}$.

Satz 3.14 (Einzelwahrscheinlichkeiten von $X_{M,1}$)**.** Sei das Tripel $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P \colon 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$.

Die diskrete Zufallsgröße $X_{M,1}$ ist für $i \in \{4,5,6\}$ mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $P(\{X_{M,1} = i\}) = \frac{1}{3}$ beschrieben.

Beweis von Satz 3.14.

Sei $i \in \{4,5,6\}$, dann erhalten wir

$$P(\{X_{M,1} = i\}) = P(\{\omega \in \Omega : X_{M,1}(\omega) = i\}) = P(\{x_1 \in \Omega : (x_1 = i) \vee (x_1 = 7 - i)\}).$$

Da die Ereignisse disjunkt sind, folgt aus dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten

$$P(\{X_{M,1} = i\}) = P(\{x_1 \in \Omega : x_1 = i\}) + P(\{x_1 \in \Omega : x_1 = 7 - i\}).$$

Mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace können wir nun die Einzelwahrscheinlichkeiten mit

$$P(\{X_{M,1} = i\}) = \frac{|\{x_1 \in \Omega : x_1 = i\}| + |\{x_1 \in \Omega : x_1 = 7 - i\}|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

angeben.

Somit ist auch die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten $\sum_{i=4}^{6} \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$ $\square$

3.4 Würfelwert des Bogenschützen

Der Spieler mit der Spielfigur Bogenschütze kann einen Kampf gegen eine Kreatur mit drei, vier oder fünf sechsseitigen, idealen Würfeln (W6) antreten. Dabei werden die zur Verfügung stehenden Würfel nacheinander geworfen und der Spieler hat nach jedem Würfelwurf die Möglichkeit zu entscheiden, ob er weiter würfelt oder aufhört.

Die Anzahl der maximal zur Verfügung stehenden Würfel hängt von der Anzahl der aktuellen Willenspunkte des Bogenschützen $w_B \in W_B$ ab, die nach den Spielregeln definiert ist durch

$$n = \begin{cases} 3, & \text{wenn } \ 0 \leq w_B \leq \ 6, \\ 4, & \text{wenn } \ 7 \leq w_B \leq 13, \\ 5, & \text{wenn } 14 \leq w_B \leq 20. \end{cases}$$

Da das endgültige Wurfergebnis nicht nur durch den reinen Zufall beeinflusst wird, sondern auch durch die Entscheidung des Spielers, müssen wir auch diese mit einbeziehen und eine sinnvolle Verhaltensregel des Spielers mit der Spielfigur Bogenschütze ermitteln.

Für die Bestimmung der sinnvollen Verhaltensregel betrachten wir die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine höhere Augenzahl als die jetzige mit mindestens einem der nachfolgenden Würfel erzielt wird. Des Weiteren treffen wir die Annahme, dass es sinnvoll ist weiter zu würfeln, solange wie diese Wahrscheinlichkeit größer gleich ein halb ist. Damit können wir die folgenden Verhaltensregeln aufstellen.

Satz 3.15 (Sinnvolle Verhaltensregel)**.**

1. Verhaltensregel bei einem **Würfelwurf mit drei Würfeln**:
   - Wenn mit dem ersten Würfel eine Augenzahl kleiner gleich Vier erzielt wird, ist es sinnvoll weiter zu würfeln.
   - Wird mit dem zweiten Würfel eine Eins, Zwei oder Drei erzielt, ist es sinnvoll weiter zu würfeln.
2. Verhaltensregel bei einem **Würfelwurf mit vier Würfeln**:
   - Ist die Augenzahl des ersten Würfels kleiner gleich Vier, ist es sinnvoll weiter zu würfeln.
   - Wenn die erzielte Augenzahl des zweiten Würfels kleiner gleich Vier ist, ist es sinnvoll weiter zu würfeln.
   - Es ist sinnvoll weiter zu würfeln, wenn mit dem dritten Würfel eine Augenzahl kleiner gleich Drei erzielt wird.

3. Verhaltensregel bei einem **Würfelwurf mit fünf Würfeln**:

- Wenn mit dem ersten Würfel eine Augenzahl kleiner gleich Fünf erzielt wird, ist es sinnvoll weiter zu würfeln.
- Wird mit dem zweiten Würfel eine Augenzahl kleiner gleich Vier erzielt, ist es sinnvoll weiter zu würfeln.
- Ist die Augenzahl des dritten Würfels kleiner gleich Vier, ist es sinnvoll weiter zu würfeln.
- Auch ist es sinnvoll weiter zu würfeln, wenn mit dem vierten Würfel eine Eins, Zwei oder Drei erzielt wird.

Beweis von Satz 3.15.

Exemplarisch führen wir den Beweis für den Würfelwurf mit drei Würfeln durch. Die Herleitung der sinnvollen Verhaltensregeln für den Würfelwurf mit vier oder fünf Würfeln erfolgt analog.

Sei $0 \leq w_B \leq 6$ und damit $n = 3$.

(i) Als erstes zeigen wir, wann es sinnvoll ist nach dem ersten Würfelergebnis weiter zu würfeln. Sei $i \in \{1, \ldots, 6\}$ die erzielte Augenzahl des ersten Würfels.

Wir suchen also die Werte von i, die die Gleichung

$$P(\{\omega \in \Omega^3 : (x_2 > i) \vee (x_3 > i)\} | \{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i\}) \geq \frac{1}{2}$$

erfüllen.

Hierfür betrachten wir die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und erhalten

$$1 - P(\{\omega \in \Omega^3 : x_2 \leq i,\ x_3 \leq i\} | \{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$1 - \frac{P(\{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i,\ x_2 \leq i,\ x_3 \leq i\})}{P(\{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i\})} \geq \frac{1}{2}.$$

Mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace ist

$$P(\{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i,\ x_2 \leq i,\ x_3 \leq i\}) = \tfrac{i^2}{6^3} \text{ und } P(\{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i\}) = \tfrac{1}{6}.$$

Damit erhalten wir $1 - \frac{i^2}{6^2} \geq \frac{1}{2}$ und können diese Gleichung nun nach i umstellen und erhalten

$$i \leq \sqrt{18} \approx 4{,}2426.$$

Damit haben wir gezeigt, dass es sinnvoll ist weiter zu würfeln, wenn mit dem ersten Würfel eine Eins, Zwei, Drei oder Vier erzielt wird.

(ii) Als nächstes zeigen wir, wann es sinnvoll ist nach dem zweiten Würfelergebnis weiter zu würfeln. Sei $j \in \{1, \dots, 6\}$ die erzielte Augenzahl des zweiten Würfels und $i \in \{1, \dots, 4\}$ die erzielte Augenzahl des ersten Würfels.

Wir suchen also die Werte von j, die die Gleichung

$$P(\{\omega \in \Omega^3 : x_3 > j\} | \{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i,\ x_2 = j\}) \geq \frac{1}{2}$$

erfüllen.

Hierfür betrachten wir wieder das Gegenereignis und erhalten

$$1 - P(\{\omega \in \Omega^3 : x_3 \leq j\} | \{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i,\ x_2 = j\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$1 - \frac{P(\{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i,\ x_2 = j,\ x_3 \leq j\})}{P(\{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i,\ x_2 = j\})} \geq \frac{1}{2}.$$

Mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace ist

$P(\{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i,\ x_2 = j,\ x_3 \leq j\}) = \frac{j}{6^3}$ und $P(\{\omega \in \Omega^3 : x_1 = i,\ x_2 = j\}) = \frac{1}{6^2}$.

Damit erhalten wir $1 - \frac{j}{6} \geq \frac{1}{2}$ und können diese Gleichung nun nach j umstellen und erhalten

$$j \leq 3.$$

Damit haben wir gezeigt, dass es sinnvoll ist weiter zu würfeln, wenn mit dem zweiten Würfel ein Wert kleiner gleich Drei erzielt wird.

□

Mit der genannten Verhaltensregel können wir nun die Definition des Würfelwertes des Bogenschützen unter Verwendung dieser Regel angeben.

Definition 3.16 (Würfelwert des Bogenschützen)**.** Der *Würfelwert des Bogenschützen* ist die letzte gewürfelte Augenzahl.

1. Sei $n = 3$ und $\omega \in \Omega^3$. Für $w_B \in [0, 6]$ bezeichnen wir die Abbildung $X_{B,3} \colon \Omega^3 \to \mathbb{N}$ mit

$$X_{B,3}(\omega) = \begin{cases} 6, & \text{wenn } \omega \in (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \text{ mit } i = 6, \\ 5, & \text{wenn } \omega \in (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \text{ mit } i = 5, \\ 4, & \text{wenn } \omega \in (A_2 \cup A_3) \text{ mit } i = 4, \\ 3, & \text{wenn } \omega \in A_3 \text{ mit } i = 3, \\ 2, & \text{wenn } \omega \in A_3 \text{ mit } i = 2, \\ 1, & \text{wenn } \omega \in A_3 \text{ mit } i = 1, \end{cases}$$

als *Würfelwert des Bogenschützen,* wobei

- $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega^3 : x_1 = i\}$,
- $A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega^3 : x_1 \leq 4,\ x_2 = i\}$ und
- $A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega^3 : x_1 \leq 4,\ x_2 \leq 3,\ x_3 = i\}$.

2. Sei $n = 4$ und $\omega \in \Omega^4$. Für $w_B \in [7, 13]$ bezeichnen wir die Abbildung $X_{B,4} \colon \Omega^4 \to \mathbb{N}$ mit

$$X_{B,4}(\omega) = \begin{cases} 6, & \text{wenn } \omega \in (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \text{ mit } i = 6, \\ 5, & \text{wenn } \omega \in (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \text{ mit } i = 5, \\ 4, & \text{wenn } \omega \in (B_3 \cup B_4) \text{ mit } i = 4, \\ 3, & \text{wenn } \omega \in B_4 \text{ mit } i = 3, \\ 2, & \text{wenn } \omega \in B_4 \text{ mit } i = 2, \\ 1, & \text{wenn } \omega \in B_4 \text{ mit } i = 1, \end{cases}$$

als *Würfelwert des Bogenschützen,* wobei

- $B_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega^4 : x_1 = i\}$,
- $B_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega^4 : x_1 \leq 4,\ x_2 = i\}$,
- $B_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega^4 : x_1 \leq 4,\ x_2 \leq 4,\ x_3 = i\}$ und
- $B_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega^4 : x_1 \leq 4,\ x_2 \leq 4,\ x_3 \leq 3,\ x_4 = i\}$.

3. Sei $n = 5$ und $\omega \in \Omega^5$. Für $w_B \in [14, 20]$ bezeichnen wir die Abbildung $X_{B,5} \colon \Omega^5 \to \mathbb{N}$ mit

$$X_{B,5}(\omega) = \begin{cases} 6, & \text{wenn } \omega \in (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5) \text{ mit } i = 6, \\ 5, & \text{wenn } \omega \in (C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5) \text{ mit } i = 5, \\ 4, & \text{wenn } \omega \in (C_4 \cup C_5) \text{ mit } i = 4, \\ 3, & \text{wenn } \omega \in C_5 \text{ mit } i = 3, \\ 2, & \text{wenn } \omega \in C_5 \text{ mit } i = 2, \\ 1, & \text{wenn } \omega \in C_5 \text{ mit } i = 1, \end{cases}$$

als *Würfelwert des Bogenschützen,* wobei

- $C_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Omega^5 : x_1 = i\}$,
- $C_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Omega^5 : x_1 \leq 5,\ x_2 = i\}$,
- $C_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Omega^5 : x_1 \leq 5,\ x_2 \leq 4,\ x_3 = i\}$,
- $C_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Omega^5 : x_1 \leq 5,\ x_2 \leq 4,\ x_3 \leq 4,\ x_4 = i\}$ und
- $C_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Omega^5 : x_1 \leq 5,\ x_2 \leq 4,\ x_3 \leq 4,\ x_4 \leq 3,\ x_5 = i\}$.

Bemerkung 3.17. Die Abbildung $X_{B,n} \colon \Omega^n \to \mathbb{N}$ ist eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}$.

Bemerkung 3.18 (Bild von Ω^n unter $X_{B,n}$)**.** Sei $X_{B,n}$ eine Abbildung von Ω^n nach $\mathbb{N}$, dann bezeichnet die Menge $X_{B,n}(\Omega^n) = \{X_{B,n}(\omega) : \omega \in \Omega^n\} = \{1, \dots, 6\}$ das Bild von Ω^n unter $X_{B,n}$.

Satz 3.19 (Einzelwahrscheinlichkeiten von $X_{B,n}$)**.** Sei das Tripel $(\Omega^n, 2^{\Omega^n}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P\colon 2^{\Omega^n} \to \mathbb{R}$.

Die diskrete Zufallsgröße $X_{B,n}$ ist durch die Einzelwahrscheinlichkeiten aus Tabelle 3.3 beschrieben.

	$n = 3$ $0 \leq w_B \leq 6$	$n = 4$ $7 \leq w_B \leq 13$	$n = 5$ $14 \leq w_B \leq 20$
$p_1 := P(\{X_{B,n} = 1\})$	$\frac{12}{216}$	$\frac{48}{1.296}$	$\frac{240}{7.776}$
$p_2 := P(\{X_{B,n} = 2\})$	$\frac{12}{216}$	$\frac{48}{1.296}$	$\frac{240}{7.776}$
$p_3 := P(\{X_{B,n} = 3\})$	$\frac{12}{216}$	$\frac{48}{1.296}$	$\frac{240}{7.776}$
$p_4 := P(\{X_{B,n} = 4\})$	$\frac{36}{216}$	$\frac{144}{1.296}$	$\frac{720}{7.776}$
$p_5 := P(\{X_{B,n} = 5\})$	$\frac{72}{216}$	$\frac{504}{1.296}$	$\frac{2.520}{7.776}$
$p_6 := P(\{X_{B,n} = 6\})$	$\frac{72}{216}$	$\frac{504}{1.296}$	$\frac{3.816}{7.776}$
$\sum$	1	1	1

Tabelle 3.3: Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $X_{B,n}$

Beweis von Satz 3.19.

(i) Sei $0 \leq w_B \leq 6$ und damit $n = 3$.

Für $i \in \{1, \dots, 6\}$ erhalten wir mit Definition 3.16

$$p_i = \begin{cases} P(\{\omega \in \Omega^3 : \omega \in A_3\}), & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ P(\{\omega \in \Omega^3 : \omega \in (A_2 \cup A_3)\}), & \text{wenn } i = 4, \\ P(\{\omega \in \Omega^3 : \omega \in (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\}), & \text{wenn } i \in \{5,6\}. \end{cases}$$

Mit dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten folgt nun

$$p_i = \begin{cases} P(A_3), & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ P(A_2) + P(A_3), & \text{wenn } i = 4, \\ P(A_1) + P(A_2) + P(A_3), & \text{wenn } i \in \{5,6\}. \end{cases}$$

Mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace ist

$$P(A_1) = \tfrac{1}{6},\ P(A_2) = \tfrac{4}{36} \text{ und } P(A_3) = \tfrac{12}{216}.$$

Damit erhalten wir für die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$p_i = \begin{cases} \frac{12}{216}, & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ \frac{36}{216}, & \text{wenn } i = 4, \\ \frac{72}{216}, & \text{wenn } i \in \{5,6\}. \end{cases}$$

(ii) Sei $7 \leq w_B \leq 13$ und damit $n = 4$.

Mit Definition 3.16 erhalten wir für $i \in \{1, \ldots, 6\}$

$$p_i = \begin{cases} P(\{\omega \in \Omega^4 : \omega \in B_4\}), & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ P(\{\omega \in \Omega^4 : \omega \in (B_3 \cup B_4)\}), & \text{wenn } i = 4, \\ P(\{\omega \in \Omega^4 : \omega \in (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)\}), & \text{wenn } i \in \{5,6\}. \end{cases}$$

Wir können nun den Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten anwenden und erhalten

$$p_i = \begin{cases} P(B_4), & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ P(B_3) + P(B_4), & \text{wenn } i = 4, \\ P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4), & \text{wenn } i \in \{5,6\}. \end{cases}$$

Aus der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace folgt

$$P(B_1) = \tfrac{1}{6},\ P(B_2) = \tfrac{4}{36},\ P(B_3) = \tfrac{16}{216} \text{ und } P(B_4) = \tfrac{48}{1.296}.$$

Damit folgt nun für die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$p_i = \begin{cases} \frac{48}{1.296}, & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ \frac{144}{1.296}, & \text{wenn } i = 4, \\ \frac{504}{1.296}, & \text{wenn } i \in \{5,6\}. \end{cases}$$

(iii) Sei $14 \leq w_B \leq 20$ und damit $n = 5$.

Für $i \in \{1, \ldots, 6\}$ erhalten wir mit Definition 3.16

$$p_i = \begin{cases} P(\{\omega \in \Omega^5 : \omega \in C_5\}), & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ P(\{\omega \in \Omega^5 : \omega \in (C_4 \cup C_5)\}), & \text{wenn } i = 4, \\ P(\{\omega \in \Omega^5 : \omega \in (C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5)\}), & \text{wenn } i = 5, \\ P(\{\omega \in \Omega^5 : \omega \in (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5)\}), & \text{wenn } i = 6. \end{cases}$$

Da die Ereignisse disjunkt sind, folgt aus dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten

$$p_i = \begin{cases} P(C_5), & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ P(C_4) + P(C_5), & \text{wenn } i = 4, \\ P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) + P(C_5), & \text{wenn } i = 5, \\ P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) + P(C_5), & \text{wenn } i = 6. \end{cases}$$

Mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace ist

$$P(C_1) = \tfrac{1}{6},\ P(C_2) = \tfrac{5}{36},\ P(C_3) = \tfrac{20}{216},\ P(C_4) = \tfrac{80}{1.296} \text{ und } P(C_5) = \tfrac{240}{7.776}.$$

Damit erhalten wir für die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$p_i = \begin{cases} \frac{240}{7.776}, & \text{wenn } i \in \{1,2,3\}, \\ \frac{720}{7.776}, & \text{wenn } i = 4, \\ \frac{2.520}{7.776}, & \text{wenn } i = 5, \\ \frac{3.816}{7.776}, & \text{wenn } i = 6. \end{cases}$$

$\square$

4 Würfelwerte der Kreaturen

In diesem Kapitel betrachten wir die Würfelspiele, die für die Ermittlung der Würfelwerte der Kreaturen durchgeführt werden, als Zufallsexperimente und führen die Würfelwerte der Kreaturen als diskrete Zufallsgrößen ein und ermitteln ihre Einzelwahrscheinlichkeiten.

Da der Gegenstand unserer Betrachtungen die Legende 2 ist, in der die Trolle kein Bestandteil sind, werden in dieser Arbeit nur die Gors, die Skrale und die Wardraks betrachtet.

Definition 4.1 (Symbole der Kreaturen)**.** Für die Charaktere der Kreaturen definieren wir die folgenden Symbole. Wir bezeichnen

- den Gor mit G,
- den Skral mit S und
- den Wardrak mit W.

4.1 Würfelwert des Gors und des Skrals

Tritt ein Held in einem Kampf gegen einen Gor oder einen Skral an, werden für den Gor oder den Skral zwei sechsseitige, ideale Würfel (W6) gleichzeitig geworfen.

Den **Würfelwurf mit zwei Würfeln** beschreiben wir durch die Ergebnismenge

$$\Omega^2 = \{(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in \{1, \ldots, 6\}\},$$

hierbei bezeichnet y_i den Wert des i-ten Würfels.

Die 36 Elementarereignisse $\omega_1, \ldots, \omega_{36}$ sehen wir als gleichwahrscheinlich an und legen das Laplace-Modell zugrunde. Damit können wir die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse mit $P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_{36}\}) = \frac{1}{36}$ angeben.

Nach den Spielregeln ist der Würfelwert des Gors und des Skrals als die höchste Augenzahl der beiden geworfenen Würfel angegeben, wenn die gezeigten Augenzahlen voneinander verschieden sind. Für den Fall, dass die gezeigten Augenzahlen gleich sind, ist der Würfelwert die Summe der Augenzahlen.

Damit erhalten wir die folgende Definition für die Würfelwerte.

Definition 4.2 (Würfelwert des Gors und des Skrals)**.** Sind $Y_{G,2}\colon \Omega^2 \to \mathbb{N}$ und $Y_{S,2}\colon \Omega^2 \to \mathbb{N}$ Abbildungen mit

$$Y_{G,2}(\omega) = Y_{S,2}(\omega) = \begin{cases} y_1, & \text{wenn } y_1 > y_2, \\ y_2, & \text{wenn } y_1 < y_2, \\ y_1 + y_2, & \text{wenn } y_1 = y_2, \end{cases}$$

so bezeichnen wir $Y_{G,2}$ als *Würfelwert des Gors* und $Y_{S,2}$ als *Würfelwert des Skrals,* für $\omega \in \Omega^2$.

Bemerkung 4.3. Die Abbildungen $Y_{G,2}\colon \Omega^2 \to \mathbb{N}$ und $Y_{S,2}\colon \Omega^2 \to \mathbb{N}$ sind diskrete Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}$.

Bemerkung 4.4 (Bild von Ω^2 unter $Y_{G,2}$)**.** Sei $Y_{G,2}$ eine Abbildung von Ω^2 nach $\mathbb{N}$, dann bezeichnet die Menge $Y_{G,2}(\Omega^2) = \{Y_{G,2}(\omega) : \omega \in \Omega^2\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ das Bild von Ω^2 unter $Y_{G,2}$.

Bemerkung 4.5 (Bild von Ω^2 unter $Y_{S,2}$)**.** Sei $Y_{S,2}$ eine Abbildung von Ω^2 nach $\mathbb{N}$, dann bezeichnet die Menge $Y_{S,2}(\Omega^2) = \{Y_{S,2}(\omega) : \omega \in \Omega^2\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ das Bild von Ω^2 unter $Y_{S,2}$.

Satz 4.6 (Einzelwahrscheinlichkeiten von $Y_{G,2}$ und $Y_{S,2}$)**.** Sei das Tripel $(\Omega^2, 2^{\Omega^2}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P\colon 2^{\Omega^2} \to \mathbb{R}$.

Die diskreten Zufallsgrößen $Y_{G,2}$ und $Y_{S,2}$ sind durch die Einzelwahrscheinlichkeiten aus Tabelle 4.1 beschrieben.

i	2	3	4	5	6	8	10	12	$\sum$
$p_i := P(\{Y_{G,2} = i\}) = P(\{Y_{S,2} = i\})$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Tabelle 4.1: Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgrößen $Y_{G,2}$ und $Y_{S,2}$

Beweis von Satz 4.6.

Sei $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$.

Mit Definition 4.2 können wir die Einzelwahrscheinlichkeiten der beiden Kreaturen mit

$$p_i = P(\{(i, y_2) \in \Omega^2 : y_2 < i\} \cup \{(y_1, i) \in \Omega^2 : y_1 < i\} \cup \{(y_1, y_2) \in \Omega^2 : y_1 = y_2 = \tfrac{i}{2}\})$$

angeben.

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} A &:= \{(i, y_2) \in \Omega^2 : y_2 < i\}, \\ B &:= \{(y_1, i) \in \Omega^2 : y_1 < i\} \text{ und} \\ C &:= \{(y_1, y_2) \in \Omega^2 : y_1 = y_2 = \tfrac{i}{2}\}. \end{aligned}$$

Dann ist für $i \in \{3,5\}$ das Ereignis C das unmögliche Ereignis, da kein Elementarereignis existiert, das die Bedingung $y_1 = y_2 = \frac{i}{2}$ erfüllt. Genauso sind die Ereignisse A und B für $i \in \{8,10,12\}$ unmögliche Ereignisse, da kein Elementarereignis existiert, das die Bedingung $y_1 = i$ oder die Bedingung $y_2 = i$ erfüllt.

Also ist

$$p_i = \begin{cases} P(A \cup B), & \text{wenn } i \in \{3,5\}, \\ P(A \cup B \cup C), & \text{wenn } i \in \{2,4,6\}, \\ P(C), & \text{wenn } i \in \{8,10,12\}. \end{cases}$$

Wenden wir nun den Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten an, erhalten wir

$$p_i = \begin{cases} P(A) + P(B), & \text{wenn } i \in \{3,5\}, \\ P(A) + P(B) + P(C), & \text{wenn } i \in \{2,4,6\}, \\ P(C), & \text{wenn } i \in \{8,10,12\}, \end{cases}$$

da die Ereignisse A, B und C disjunkt sind.

Nun können wir mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace die Einzelwahrscheinlichkeiten mit

$$p_i = \begin{cases} \frac{2i-2}{36}, & \text{wenn } i \in \{3,5\}, \\ \frac{2i-1}{36}, & \text{wenn } i \in \{2,4,6\}, \\ \frac{1}{36}, & \text{wenn } i \in \{8,10,12\}, \end{cases}$$

angeben. □

4.2 Würfelwert des Wardraks

Im Kampf gegen einen Wardrak wird ein spezieller Würfel verwendet, den wir als Wardrak-Würfel bezeichnen. Der Wardrak-Würfel ist ein sechsseitiger Würfel, der sich durch die Beschriftung von einem sechsseitigen Standardwürfel (W6) unterscheidet. Die Beschriftung der Würfelseiten ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Zu Beginn des Kampfes werden für den Wardrak zwei Wardrak-Würfel gleichzeitig geworfen. Besitzt ein Wardrak während eines Kampfes weniger als sieben Willenspunkte, wird nur noch ein Wardrak-Würfel verwendet. Damit ist die Anzahl der gleichzeitig geworfenen Wardrak-Würfel abhängig von der Anzahl der aktuellen Willenspunkte des Wardraks $w_W \in \{0,1,\ldots,7\}$. Sei m die Anzahl der zur Verfügung stehenden Würfel, dann ist m definiert durch

$$m = \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \le w_W \le 6, \\ 2, & \text{wenn } w_W = 7. \end{cases}$$

Für den **Würfelwurf mit einem Wardrak-Würfel** legen wir die Ergebnismenge mit

$$\Omega_W = \{y_1 : y_1 \in \{6,8,10,12\}\}$$

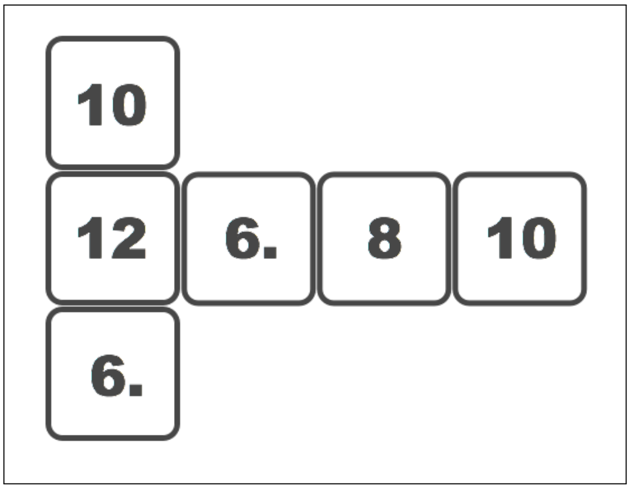

Abbildung 4.1: Würfelnetz des Wardrak-Würfels

fest, wobei y_1 die Augenzahl des Wardrak-Würfels angibt.

Da die Elementarereignisse $\omega_1, \ldots, \omega_4$ nicht gleichwahrscheinlich sind, betrachten wir für die Bestimmung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse das Ereignis, dass nach einem Würfelwurf die Würfelseite i angezeigt wird und deren Wahrscheinlichkeit.

Wir setzen $A_i = \{i\}$ mit $i \in \{1, \ldots, 6\}$, wobei A_i das Ereignis ist, dass nach einem Würfelwurf die Würfelseite i angezeigt wird. Da der Wardrak-Würfel ideal ist, sind die Ereignisse A_i gleichwahrscheinlich und können nach der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(A_i) = \frac{1}{6}$ eintreten.

Bemerkung 4.7. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Würfelseiten des Wardrak-Würfels wie folgt beschriftet,

- die erste und zweite Würfelseite mit einer Sechs,
- die dritte Würfelseite mit einer Acht,
- die vierte und fünfte Würfelseite mit einer Zehn und
- die sechste Würfelseite mit einer Zwölf.

Bemerkung 4.8. Sei das Tripel $(\Omega_W, 2^{\Omega_W}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P\colon 2^{\Omega_W} \to \mathbb{R}$, dann gilt für die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $P(\{y_1 = 6\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{y_1 = 8\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{y_1 = 10\}) = \frac{1}{3}$ und $P(\{y_1 = 12\}) = \frac{1}{6}$.

Beweis von Bemerkung 4.8.

Wir können die Elementarereignisse mit den Ereignissen A_i beschreiben und erhalten damit die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse

$$\begin{aligned}
P(\{y_1 = \ 6\}) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{3}, \\
P(\{y_1 = \ 8\}) &= P(A_3) = \frac{1}{6}, \\
P(\{y_1 = 10\}) &= P(A_4 \cup A_5) = P(A_4) + P(A_5) = \frac{1}{3} \text{ und} \\
P(\{y_1 = 12\}) &= P(A_6) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

□

Bei einem **Würfelwurf mit zwei Wardrak-Würfeln** ist die Ergebnismenge gegeben durch

$$\Omega_W^2 = \{(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in \{6, 8, 10, 12\}\},$$

dabei bezeichne y_1 die Augenzahl des ersten Wardrak-Würfels und y_2 die Augenzahl des zweiten Wardrak-Würfels.

Für die Bestimmung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\omega_1, \ldots, \omega_{16}$ betrachten wir das Ereignis, dass nach dem Würfelwurf der erste Würfel die Würfelseite i anzeigt und der zweite Würfel die Würfelseite j.

Das Ereignis, dass nach einem Würfelwurf der erste Würfel die Würfelseite i anzeigt, bezeichnen wir mit $A_i = \{i\}$ für $i \in \{1, \ldots, 6\}$ und das Ereignis, dass der zweite Würfel die Würfelseite j anzeigt, bezeichnen wir mit $B_j = \{j\}$ für $j \in \{1, \ldots, 6\}$.

Da wir für die Bestimmung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse A_i und B_j das Laplace-Modell anwenden können, können wir sie mit $P(A_i) = P(B_j) = \frac{1}{6}$ für $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$ angeben.

Des Weiteren können wir die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass nach dem Würfelwurf der erste Würfel die Würfelseite i und der zweite Würfel die Würfelseite j anzeigt, mit

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j) = \frac{1}{36}, \tag{4.1}$$

für $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$ angeben, da die Ereignisse A_i und B_j unabhängig voneinander sind.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Beschriftung des ersten und zweiten Wardrak-Würfels wie in Bemerkung 4.7 angegeben.

Bemerkung 4.9. Sei das Tripel $(\Omega_W^2, 2^{\Omega_W^2}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P \colon 2^{\Omega_W^2} \to \mathbb{R}$, dann treten die Elementarereignisse des Würfelwurfes mit zwei Wardrak-Würfeln mit den Wahrscheinlichkeiten aus Tabelle 4.2 ein.

Beweis von Bemerkung 4.9.

Exemplarisch betrachten wir das Elementarereignis $\{(6, 6)\} \in \Omega_W^2$ und seine Eintrittswahrscheinlichkeit. Die Berechnung der weiteren Eintrittswahrscheinlichkeiten erfolgt analog.

Wenn wir dieses Elementarereignis mit den Ereignissen A_i und B_j beschreiben, erhalten wir

$$P(\{(6,6)\}) = P((A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2)).$$

Durch Anwendung des Additionssatzes für Wahrscheinlichkeiten und (4.1) erhalten wir

$$P(\{(6,6)\}) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) = \frac{4}{36}.$$

□

$P(\{(6,6)\})$	$P(\{(6,8)\})$	$P(\{(6,10)\})$	$P(\{(6,12)\})$	$P(\{(8,6)\})$	$P(\{(8,8)\})$
$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(\{(8,10)\})$	$P(\{(8,12)\})$	$P(\{(10,6)\})$	$P(\{(10,8)\})$	$P(\{(10,10)\})$	$P(\{(10,12)\})$
$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$
$P(\{(12,6)\})$	$P(\{(12,8)\})$	$P(\{(12,10)\})$	$P(\{(12,12)\})$	$\sum$	
$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1	

Tabelle 4.2: Eintrittswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\omega \in \Omega_W^2$

Definition 4.10 (Würfelwert des Wardraks)**.** Der *Würfelwert des Wardraks* ist die höchste Augenzahl der geworfenen Wardrak-Würfel, wenn die gezeigten Augenzahlen voneinander verschieden sind und wenn sie gleich sind, die Summe der Augenzahlen.

1. Bei einem **Würfelwurf mit einem Wardrak-Würfel** ist der Würfelwert des Wardraks definiert mit

$$Y_{W,1}(\omega) = y_1,$$

wobei $\omega \in \Omega_W$.

2. Bei einem **Würfelwurf mit zwei Wardrak-Würfeln** ist der Würfelwert des Wardraks definiert mit

$$Y_{W,2}(\omega) = \begin{cases} y_1, & \text{wenn } y_1 > y_2, \\ y_2, & \text{wenn } y_1 < y_2, \\ y_1 + y_2, & \text{wenn } y_1 = y_2, \end{cases}$$

wobei $\omega \in \Omega_W^2$.

Bemerkung 4.11. Die Abbildung $Y_{W,m} \colon \Omega_W^m \to \mathbb{N}$ ist eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}$.

Bemerkung 4.12 (Bild von Ω_W unter $Y_{W,1}$)**.** Sei $Y_{W,1}$ eine Abbildung von Ω_W nach $\mathbb{N}$, dann bezeichnet die Menge $Y_{W,1}(\Omega_W) = \{Y_{W,1}(\omega) : \omega \in \Omega_W\} = \{6, 8, 10, 12\}$ das Bild von Ω_W unter $Y_{W,1}$.

Bemerkung 4.13 (Bild von Ω_W^2 unter $Y_{W,2}$)**.** Sei $Y_{W,2}$ eine Abbildung von Ω_W^2 nach $\mathbb{N}$, dann bezeichnet die Menge $Y_{W,2}(\Omega_W^2) = \{8, 10, 12, 16, 20, 24\}$ das Bild von Ω_W^2 unter $Y_{W,2}$.

Satz 4.14 (Einzelwahrscheinlichkeiten von $Y_{W,m}$)**.** Sei das Tripel $(\Omega_W^m, 2^{\Omega_W^m}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P\colon 2^{\Omega_W^m} \to \mathbb{R}$.

Die diskrete Zufallsgröße $Y_{W,m}$ ist durch die Einzelwahrscheinlichkeiten aus Tabelle 4.3 beschrieben.

$0 \leq w_W \leq 6$ und $m = 1$					
i	6	8	10	12	$\sum$
$P(\{Y_{W,1} = i\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$w_W = 7$ und $m = 2$							
i	8	10	12	16	20	24	$\sum$
$P(\{Y_{W,2} = i\})$	$\frac{4}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Tabelle 4.3: Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $Y_{W,m}$

Beweis von Satz 4.14.

(i) Die Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $Y_{W,1}$ folgen direkt aus Bemerkung 4.8.

(ii) Sei $w_W = 7$ und $\omega \in \Omega_W^2$.

Mit Definition 4.10 können wir die Einzelwahrscheinlichkeiten von $Y_{W,2}$ wie folgt angeben

$$
\begin{aligned}
&P(\{\omega : Y_{W,2} = \ \ 8\}) = P(\{(6,8)\} \cup \{(8,6)\}),\\
&P(\{\omega : Y_{W,2} = 10\}) = P\left(\textstyle\bigcup_{j=1}^{2} (\{(10-2j, 10)\} \cup \{(10, 10-2j)\})\right),\\
&P(\{\omega : Y_{W,2} = 12\}) = P\left(\left(\textstyle\bigcup_{j=1}^{3}(\{(12-2j, 12)\} \cup \{(12, 12-2j)\})\right) \cup \{(6,6)\}\right),\\
&P(\{\omega : Y_{W,2} = 16\}) = P(\{(8,8)\}),\\
&P(\{\omega : Y_{W,2} = 20\}) = P(\{(10,10)\}) \text{ und}\\
&P(\{\omega : Y_{W,2} = 24\}) = P(\{(12,12)\}).
\end{aligned}
$$

Aus dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten und Bemerkung 4.9 folgen die angegebenen Einzelwahrscheinlichkeiten. $\square$

5 Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes

Für die Modellierung eines Kampfes führen wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels eine diskrete Zufallsgröße mit ihrer Verteilung ein, die die Differenzen der Kampfwerte der Helden und der Kreaturen beschreibt.

Definition 5.1 (Stärkepunkte der Helden)**.** Sei $H \in \{D, F, M, B\}$ ein Held. Wir bezeichnen $S_H = \{1, \ldots, 14\}$ als die Menge der Stärkepunkte des Helden H und $s_H \in S_H$ als die Anzahl der aktuellen Stärkepunkte des Helden H.

Bemerkung 5.2. Die Stärkepunkte der Helden sind über die Kampfdauer konstant.

Definition 5.3 (Stärkepunkte der Kreaturen)**.** Die Stärkepunkte der Kreaturen sind durch die Spielregeln fest vorgegeben und über die Spieldauer konstant.

1. Sei $s_G = 2$ die Anzahl der *Stärkepunkte des Gors.*
2. Sei $s_S = 6$ die Anzahl der *Stärkepunkte des Skrals.*
3. Sei $s_W = 10$ die Anzahl der *Stärkepunkte des Wardraks.*

Definition 5.4 (maximale Rundenanzahl)**.** Sei $t \in \{0, \ldots, 7\}$ die aktuelle Stunde des Helden auf der Tagesleiste. Wir setzen $r = 7 - t$ und bezeichnen r als die maximale Anzahl an Kampfrunden, die der Held am laufenden Tag noch bestreiten kann.

Definition 5.5. Sei $H \in \{D, F, M, B\}$ ein Held und $k \in \{1, \ldots, r\}$ eine beliebige Kampfrunde, wobei $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden ist. Wir bezeichnen $w_H^k \in W_H$ als die Anzahl der Willenspunkte des Helden H nach der k-ten Kampfrunde.

Definition 5.6. Die Menge der Anfangswillenspunkte des Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ bezeichnen wir mit $W_H^0 = W_H \backslash \{0\}$ und $w_H^0 \in W_H^0$ als die Anzahl der Willenspunkte, mit denen der Held den Kampf beginnt.

Bemerkung 5.7. Die Willenspunkte der Kreaturen, mit denen sie einen Kampf beginnen, sind durch die Spielregeln fest vorgegeben und über die Spieldauer konstant.

1. Sei $w_G^0 = 4$ die Anzahl der *Anfangswillenspunkte des Gors.*
2. Sei $w_S^0 = 6$ die Anzahl der *Anfangswillenspunkte des Skrals.*
3. Sei $w_W^0 = 7$ die Anzahl der *Anfangswillenspunkte des Wardraks.*

Definition 5.8. Sei $K \in \{G, S, W\}$ eine Kreatur und $k \in \{1, \ldots, r\}$ eine beliebige Kampfrunde, wobei $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden ist. Wir bezeichnen $w_K^k \in \{0, 1, \ldots, w_K^0\}$ als die Anzahl der Willenspunkte der Kreatur K nach der k-ten Kampfrunde.

Bemerkung 5.9. Sei $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden. Den Würfelwert des Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ in einer beliebigen Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$ bezeichnen wir mit $X_{H,n}^k$, wenn dem Helden n Würfel zur Verfügung stehen.

Die Würfelwerte $X_{H,n}^1, \ldots, X_{H,n}^7$ sind identisch verteilt, wobei $X_{H,n}^k = X_{H,n}$.

Bemerkung 5.10. Sei $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden. Wir bezeichnen $Y_{K,m}^k$ als den Würfelwert der Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ in einer beliebigen Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$, wenn der Kreatur m Würfel zur Verfügung stehen.

Die Würfelwerte $Y_{K,m}^1, \ldots, Y_{K,m}^7$ sind identisch verteilt, wobei $Y_{K,m}^k = Y_{K,m}$.

Definition 5.11 (Kampfwert des Helden)**.** Sei $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden. Den Kampfwert des Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ in einer beliebigen Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$ bezeichnen wir mit $K_{H,n}^k$, wenn dem Helden n Würfel zur Verfügung stehen und setzen

$$K_{H,n}^k = X_{H,n}^k + s_H.$$

Definition 5.12 (Kampfwert der Kreatur)**.** Sei $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden. Den Kampfwert der Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ in einer beliebigen Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$ bezeichnen wir mit $K_{K,m}^k$, wenn der Kreatur m Würfel zur Verfügung stehen und setzen

$$K_{K,m}^k = Y_{K,m}^k + s_K.$$

5.1 Verteilung der Differenzen der Kampfwerte

Definition 5.13 (Differenz der Kampfwerte)**.** Sei $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden. Die Differenz der Kampfwerte des Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ und der Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ in einer beliebigen Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$ bezeichnen wir mit $Z_{H,n:K,m}^k$ und setzen

$$Z_{H,n:K,m}^k = K_{H,n}^k - K_{K,m}^k.$$

Bemerkung 5.14. Mit den Definitionen 5.11 und 5.12 der Kampfwerte erhalten wir für die Differenz der Kampfwerte

$$Z_{H,n:K,m}^k = X_{H,n}^k + s_H - Y_{K,m}^k - s_K.$$

Bemerkung 5.15. Die Abbildung $Z_{H,n:K,m}^k$ ist eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{Z}$.

Bemerkung 5.16. Die diskrete Zufallsgröße $Z^k_{H,n:K,m}$ ist darstellbar als disjunkte Vereinigung der Elementarereignisse des Würfelwurfes des Helden geschnitten mit denen des Würfelwurfes der Kreatur.

Exemplarisch betrachten wir die Verteilung der Differenz der Kampfwerte des Zauberers und des Gors $Z^k_{M,1:G,2}$.

Die Verteilungen für die weiteren Kampfkonstellationen sind im CD-Anhang in den Tabellen A.1 – A.12 aufgeführt.

Definition 5.17 (Differenz der Kampfwerte des Zauberers und des Gors)**.**
Sei $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Rundenanzahl des Kampfes und sei $k \in \{1, \ldots, r\}$ eine beliebige Kampfrunde. Die Abbildung $Z^k_{M,1:G,2} : \Omega \times \Omega^2 \to \mathbb{Z}$ mit

$$Z^k_{M,1:G,2} = \begin{cases} s_M + 2, & \text{mit } P(\{X^k_{M,1} = 6,\ Y^k_{G,2} = 2\}), \\ s_M + 1, & \text{mit } P(\bigcup_{i=5}^{6}\{X^k_{M,1} = i,\ Y^k_{G,2} = i-3\}), \\ s_M, & \text{mit } P(\bigcup_{i=4}^{6}\{X^k_{M,1} = i,\ Y^k_{G,2} = i-2\}), \\ s_M - 1, & \text{mit } P(\bigcup_{i=4}^{6}\{X^k_{M,1} = i,\ Y^k_{G,2} = i-1\}), \\ s_M - 2, & \text{mit } P(\bigcup_{i=4}^{6}\{X^k_{M,1} = i,\ Y^k_{G,2} = i\}), \\ s_M - 3, & \text{mit } P(\bigcup_{i=4}^{5}\{X^k_{M,1} = i,\ Y^k_{G,2} = i+1\}), \\ s_M - 4, & \text{mit } P(\bigcup_{i=2}^{3}\{X^k_{M,1} = 2i,\ Y^k_{G,2} = 2i+2\}), \\ s_M - 5, & \text{mit } P(\{X^k_{M,1} = 5,\ Y^k_{G,2} = 8\}), \\ s_M - 6, & \text{mit } P(\bigcup_{i=2}^{3}\{X^k_{M,1} = 2i,\ Y^k_{G,2} = 2i+4\}), \\ s_M - 7, & \text{mit } P(\{X^k_{M,1} = 5,\ Y^k_{G,2} = 10\}), \\ s_M - 8, & \text{mit } P(\bigcup_{i=2}^{3}\{X^k_{M,1} = 2i,\ Y^k_{G,2} = 2i+6\}), \\ s_M - 9, & \text{mit } P(\{X^k_{M,1} = 5,\ Y^k_{G,2} = 12\}), \\ s_M - 10, & \text{mit } P(\{X^k_{M,1} = 4,\ Y^k_{G,2} = 12\}), \end{cases}$$

bezeichnen wir als die Differenz der Kampfwerte des Zauberers und des Gors in der k-ten Kampfrunde, wenn dem Zauberer ein Würfel und dem Gor zwei Würfel zur Verfügung stehen.

$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M + 2\})$	$\frac{3}{108}$	$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 5\})$	$\frac{1}{108}$
$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M + 1\})$	$\frac{7}{108}$	$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 6\})$	$\frac{2}{108}$
$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M\})$	$\frac{14}{108}$	$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 7\})$	$\frac{1}{108}$
$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 1\})$	$\frac{19}{108}$	$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 8\})$	$\frac{2}{108}$
$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 2\})$	$\frac{26}{108}$	$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 9\})$	$\frac{1}{108}$
$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 3\})$	$\frac{19}{108}$	$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 10\})$	$\frac{1}{108}$
$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M - 4\})$	$\frac{12}{108}$	$\sum$	1

Tabelle 5.1: Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgrößen $Z^k_{M,1:G,2}$

Satz 5.18 (Einzelwahrscheinlichkeiten von $Z^k_{M,1:G,2}$)**.** Sei das Tripel $(\Omega \times \Omega^2, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Abbildung $P\colon \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$.

Die diskrete Zufallsgröße $Z^k_{M,1:G,2}$ ist durch die Einzelwahrscheinlichkeiten aus Tabelle 5.1 beschrieben.

Beweis von Satz 5.18.

Mit Definition 5.17 lassen sich die Realisierungen der Zufallsgröße $Z^k_{M,1:G,2}$ den Elementarereignissen des Würfelwurfes des Zauberers und des Gors exakt zuordnen. Damit erhalten wir wegen der Unabhängigkeit der Würfelwürfe die Einzelwahrscheinlichkeiten für alle Werte der Zufallsgröße $Z^k_{M,1:G,2}$.

Exemplarisch betrachten wir die Einzelwahrscheinlichkeit der Realisierung der Zufallsgröße $Z^k_{M,1:G,2}$ mit dem Wert s_M und erhalten mit Definition 5.17

$$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M\}) = P\left(\bigcup_{i=4}^{6} \{X^k_{M,1} = i,\ Y^k_{G,2} = i-2\}\right).$$

Mit dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeit und der Unabhängigkeit der Würfelwürfe erhalten wir

$$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M\}) = \sum_{i=4}^{6} P(\{X^k_{M,1} = i\}) \cdot P(\{Y^k_{G,2} = i-2\}).$$

Mit den Einzelwahrscheinlichkeiten des Würfelwertes des Zauberers aus Satz 3.14 und des Gors aus Satz 4.6 erhalten wir nun

$$P(\{Z^k_{M,1:G,2} = s_M\}) = \tfrac{14}{108}.$$

□

5.2 Modell eines Kampfes

Mit Hilfe der Differenz der Kampfwerte werden wir in diesem Abschnitt die möglichen Ausgänge einer Kampfrunde und die Ereignisse des Kampfes beschreiben.

Bemerkung 5.19 (Ausgang einer Kampfrunde)**.** In einem Kampf mit maximal $r \in \{1, \ldots, 7\}$ möglichen Kampfrunden, existieren für eine beliebige Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$ die folgenden drei möglichen Ausgänge.

Der **Held gewinnt** die k-te **Kampfrunde**, wenn $Z^k_{H,n:K,m} > 0$. In diesem Fall verliert die Kreatur Willenspunkte in der Höhe der Realisierung der Zufallsgröße $Z^k_{H,n:K,m}$.

Ist $Z^k_{H,n:K,m} = 0$, wird die k-te **Kampfrunde** mit einem **Unentschieden** beendet und der Held und die Kreatur verlieren keine Willenspunkte.

Die **Kreatur gewinnt** die k-te **Kampfrunde**, wenn $Z^k_{H,n:K,m} < 0$. In diesem Fall verliert der Held Willenspunkte in der Höhe des Betrages der Realisierung der Zufallsgröße $Z^k_{H,n:K,m}$.

Die Ermittlung der Willenspunkte der Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ und der Kreaturen $K \in \{G, S, W\}$ nach einer beliebigen Kampfrunde $k \in \{1, \dots, r\}$, wobei $r \in \{1, \dots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden ist, ist nun mit den in Bemerkung 5.19 angegebenen Ausgängen möglich.

Bemerkung 5.20. Für die Willenspunkte der Kreatur nach der k-ten Kampfrunde gilt

$$w_K^k = \begin{cases} w_K^{k-1}, & \text{wenn } Z_{H,n:K,m}^k \leq 0, \\ w_K^{k-1} - Z_{H,n:K,m}^k, & \text{wenn } 0 < Z_{H,n:K,m}^k < w_K^{k-1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 5.21. Für die Willenspunkte der Helden nach der k-ten Kampfrunde gilt

$$w_H^k = \begin{cases} w_H^{k-1}, & \text{wenn } Z_{H,n:K,m}^k \geq 0, \\ w_H^{k-1} - |Z_{H,n:K,m}^k|, & \text{wenn } -w_H^{k-1} < Z_{H,n:K,m}^k < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 5.22 (Ereignisse eines Kampfes)**.** In einem Kampf mit einer maximalen Rundenanzahl $r \in \{1, \dots, 7\}$ kann eines von den folgenden drei disjunkten Ereignissen in jeder beliebigen Kampfrunde $k \in \{1, \dots, r\}$ eintreten.

Sei A_k das Ereignis, dass der Held den Kampf in der k-ten Kampfrunde gewinnt. Das Ereignis A_k tritt ein, wenn die Anzahl der Willenspunkte der Kreatur nach der k-ten Kampfrunde gleich Null ist.

Das Ereignis, dass die Kreatur den Kampf in der k-ten Kampfrunde gewinnt bezeichnen wir mit B_k. Dieses tritt ein, wenn die Anzahl der Willenspunkte des Helden nach der k-ten Kampfrunde gleich Null ist.

Wenn die Anzahl der Willenspunkte der Kreatur und des Helden nach der k-ten Kampfrunde größer Null sind, hat weder der Held noch die Kreatur den Kampf in der k-ten Kampfrunde gewonnen. Dieses Ereignis bezeichnen wir mit C_k.

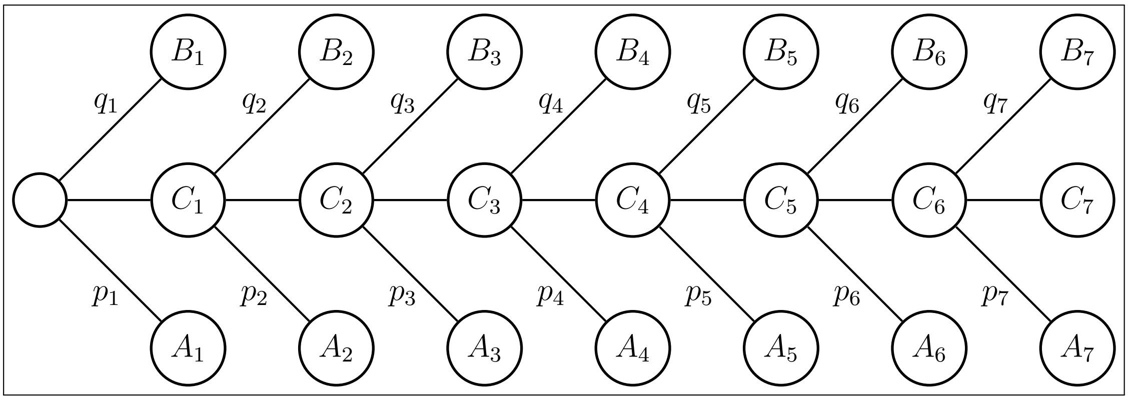

Abbildung 5.1: Ereignisse eines Kampfes für $r = 7$

Wir können nun mit der vorherigen Bemerkung eine Definition angeben mit der die Ereignisse eines Kampfes mit Hilfe der Willenspunkte der Kreaturen und der Helden sowie der Differenzen der Kampfwerte beschrieben sind.

Definition 5.23. Für einen Kampf mit maximal $r \in \{1, \ldots, 7\}$ möglichen Kampfrunden sind für eine beliebige Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$ die Ereignisse des Kampfes beschrieben durch

$$A_k = \{Z^k_{H,n:K,m} \geq w^{k-1}_K\},$$
$$B_k = \{Z^k_{H,n:K,m} \leq -w^{k-1}_H\} \text{ und}$$
$$C_k = \{-w^{k-1}_H < Z^k_{H,n:K,m} < w^{k-1}_K\}.$$

5.3 Gewinnwahrscheinlichkeiten einer Kampfrunde

Mit Bemerkung 5.19 werden wir in diesem Abschnitt die Gewinnwahrscheinlichkeiten einer beliebigen Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$ für die Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ und die Kreaturen $K \in \{G, S, W\}$ in einem Kampf mit maximal $r \in \{1, \ldots, 7\}$ möglichen Kampfrunden bestimmen. Auch können wir die Wahrscheinlichkeit angeben, dass eine beliebige Kampfrunde mit einem Unentschieden beendet wird.

Die ermittelten Gewinnwahrscheinlichkeiten einer Kampfrunde, für die möglichen Kampfkonstellationen, sind im CD-Anhang in den Tabellen B.1 – B.16 aufgeführt.

Definition 5.24. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Held die k-te Kampfrunde gewinnt, bezeichnen wir mit $p^k_{H,n:K,m}$ und setzen

$$p^k_{H,n:K,m} = P(\{Z^k_{H,n:K,m} > 0\}).$$

Definition 5.25. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kreatur die k-te Kampfrunde gewinnt, bezeichnen wir mit $q^k_{H,n:K,m}$ und setzen

$$q^k_{H,n:K,m} = P(\{Z^k_{H,n:K,m} < 0\}).$$

Definition 5.26. Die Wahrscheinlichkeit, dass die k-te Kampfrunde mit einem Unentschieden beendet wird, bezeichnen wir mit $u^k_{H,n:K,m}$ und setzen

$$u^k_{H,n:K,m} = P(\{Z^k_{H,n:K,m} = 0\}).$$

Bemerkung 5.27. Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Kampfrunde $k \in \{1, \ldots, r\}$ mit einem Unentschieden beendet wird, gilt

$$u^k_{H,n:K,m} = 1 - (p^k_{H,n:K,m} + q^k_{H,n:K,m}).$$

Bemerkung 5.28. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten einer Kampfrunde unterliegen den folgenden Abhängigkeiten.

Für die Helden Zwerg, Krieger und Bogenschütze und für die Kreaturen Gor und Skral sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten einer Kampfrunde abhängig von den Willenspunkten, mit denen der Held die k-te Kampfrunde beginnt sowie von den Stärkepunkten mit denen der Held und die Kreatur den Kampf beginnen.

Die Gewinnwahrscheinlichkeiten einer Kampfrunde für den Helden Zauberer und die Kreaturen Gor und Skral sind nur abhängig von den Stärkepunkten mit denen der Zauberer und die Kreaturen den Kampf beginnen.

In einem Kampf gegen einen Wardrak sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten einer Kampfrunde für alle Helden zusätzlich noch abhängig von den Willenspunkten, mit denen der Wardrak die k-te Kampfrunde beginnt.

5.4 Gewinnwahrscheinlichkeiten des Kampfes

Mit den in Definition 5.23 festgelegten Ereignissen eines Kampfes werden wir in diesem Abschnitt die Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes, der aus maximal $r \in \{1, \dots, 7\}$ möglichen Kampfrunden besteht, für die Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ und die Kreaturen $K \in \{G, S, W\}$ bestimmen.

Die ermittelten Gewinnwahrscheinlichkeiten sind im CD-Anhang in den Tabellen C.1 – C.168 für die möglichen Kampfkonstellationen aufgeführt.

Definition 5.29. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Held den Kampf in höchstens r Kampfrunden gewinnt, bezeichnen wir mit $P^r_{H:K}$ und setzen

$$P^r_{H:K}(w^0_H, s_H) = P\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{r} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} C_j\right) \cap A_k\right)\right),$$

mit den in Definition 5.23 festgelegten Ereignissen eines Kampfes.

Definition 5.30. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kreatur den Kampf in höchstens r Kampfrunden gewinnt, bezeichnen wir mit $Q^r_{H:K}$ und setzen

$$Q^r_{H:K}(w^0_H, s_H) = P\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{r} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} C_j\right) \cap B_k\right)\right),$$

mit den in Definition 5.23 festgelegten Ereignissen eines Kampfes.

Bemerkung 5.31. Mit der Multiplikationsregel und dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten erhalten wir für die Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes

$$P^r_{H:K}(w^0_H, s_H) = \sum_{k=1}^{r} \left[\left(\prod_{j=1}^{k-1}(1 - p_j - q_j)\right) \cdot p_k\right]$$

und

$$Q^r_{H:K}(w^0_H, s_H) = \sum_{k=1}^{r} \left[\left(\prod_{j=1}^{k-1}(1 - p_j - q_j)\right) \cdot q_k\right],$$

mit $p_k = P(A_k | \bigcap_{j=1}^{k-1} C_j)$ und $q_k = P(B_k | \bigcap_{j=1}^{k-1} C_j)$ und den in Definition 5.23 festgelegten Ereignissen eines Kampfes.

Bemerkung 5.32. Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Kampf in höchstens r Kampfrunden ohne einen Gewinner beendet wird, gilt

$$U^r_{H:K}(w^0_H, s_H) = 1 - (P^r_{H:K}(w^0_H, s_H) + Q^r_{H:K}(w^0_H, s_H)).$$

Bemerkung 5.33. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes sind abhängig von den Willenspunkten und Stärkepunkten mit denen der Held und die Kreatur den Kampf beginnen sowie von der maximalen Anzahl der möglichen Kampfrunden.

6 Auswertung der Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes

6.1 Sicherer Gewinn und Verlust der Helden im Kampf

In diesem Abschnitt stellen wir die Anfangsbedingungen auf, unter denen ein Kampf zwischen einem Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ und einer Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ immer durchgeführt werden sollte und die, in denen ein Kampf nie durchgeführt werden sollte. Hierfür betrachten wir den sicheren Gewinn und Verlust der Helden im Kampf.

Definition 6.1 (Sicherer Gewinn)**.** Seien die Willenspunkte des Helden $w_H^0 \in W_H^0$ und seine Stärkepunkte $s_H \in S_H$ zu Beginn des Kampfes fest gewählt. Ein Held gewinnt einen Kampf mit maximal $r \in \{1, \ldots, 7\}$ möglichen Kampfrunden, genau dann sicher, wenn

$$P_{H:K}^r(w_H^0, s_H) = 1.$$

Definition 6.2 (Sicherer Verlust)**.** Seien die Willenspunkte des Helden $w_H^0 \in W_H^0$ und seine Stärkepunkte $s_H \in S_H$ zu Beginn des Kampfes fest gewählt. Ein Held verliert einen Kampf mit maximal $r \in \{1, \ldots, 7\}$ möglichen Kampfrunden, genau dann sicher, wenn

$$P_{H:K}^r(w_H^0, s_H) = 0.$$

Exemplarisch betrachten wir die Anfangsbedingungen eines Kampfes unter denen ein Zauberer einen Kampf sicher gewinnt oder sicher verliert. Die Ausgangssituationen unter denen die weiteren Helden einen Kampf sicher gewinnen oder sicher verlieren sind für die weiteren Kampfkonstellationen im CD-Anhang in den Tabellen D.1 – D.5 aufgeführt.

Die Voraussetzungen unter denen ein Zauberer den Kampf sicher gewinnt, sind in Tabelle 6.1 dargestellt und die unter denen er einen Kampf sicher verliert in Tabelle 6.2. Hier fällt besonders der Kampf gegen die Kreatur Wardrak auf, da keine Anfangsbedingung existiert unter der der Zauberer den Kampf sicher gewinnen kann, er aber unter fast allen Anfangsbedingungen den Kampf sicher verliert.

Allgemein halten wir fest, dass unter den Anfangsbedingungen in denen der Gewinn eines Kampfes sicher ist, immer ein Kampf ausgelöst werden sollte und unter denen der Verlust eines Kampfes sicher ist, der Kampf nie durchgeführt werden sollte.

Zauberer vs. Gor	Zauberer vs. Skral
$s_M = 14,\ 1 \leq r \leq 7,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$	$s_M = 14,\ 4 \leq r \leq 7,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$
$s_M \in \{12, 13\},\ 2 \leq r \leq 7,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$	$s_M = 13,\ 5 \leq r \leq 7,\ 3 \leq w_M^0 \leq 20$
$s_M = 11,\ 3 \leq r \leq 7,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$	$s_M = 12,\ r \in \{6, 7\},\ 6 \leq w_M^0 \leq 20$
$s_M = 10,\ 4 \leq r \leq 7,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$	$s_M = 11,\ r = 6,\ 10 \leq w_M^0 \leq 20$
$s_M = 9,\ 4 \leq r \leq 7,\ 3 \leq w_M^0 \leq 20$	$s_M = 11,\ r = 7,\ 9 \leq w_M^0 \leq 20$
$s_M = 8,\ 5 \leq r \leq 7,\ 5 \leq w_M^0 \leq 20$	$s_M = 10,\ r = 7,\ 13 \leq w_M^0 \leq 20$
$s_M = 7,\ r = 5,\ 10 \leq w_M^0 \leq 20$	
$s_M = 7,\ r \in \{6, 7\},\ 9 \leq w_M^0 \leq 20$	
$s_M = 6,\ r = 6,\ 13 \leq w_M^0 \leq 20$	
$s_M = 6,\ r = 7,\ 12 \leq w_M^0 \leq 20$	
$s_M = 5,\ r = 7,\ w_M^0 \in \{19, 20\}$	

Tabelle 6.1: Sicherer Gewinn des Zauberers im Kampf

Zauberer vs. Gor	Zauberer vs. Skral
$r = 1,\ s_M = 1,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$	$r = 1,\ 1 \leq s_M \leq 7,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$
Zauberer vs. Wardrak	$r = 2,\ 1 \leq s_M \leq 4,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$
$r \in \{1, 2\},\ 1 \leq s_M \leq 14,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$	$3 \leq r \leq 7,\ 1 \leq s_M \leq 3,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$
$3 \leq r \leq 7,\ 1 \leq s_M \leq 12,\ 1 \leq w_M^0 \leq 20$	

Tabelle 6.2: Sicherer Verlust des Zauberers im Kampf

6.2 Einfluss der Willenspunkte und der Stärkepunkte des Helden

In einem Kampf zwischen einem Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ und einer Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ konnten wir folgende Beobachtungen bezüglich des Einflusses der Willenspunkte und Stärkepunkte auf die Gewinnwahrscheinlichkeiten des Helden und der Kreatur im Kampf aufstellen.

Sei weiterhin $r \in \{1, \ldots, 7\}$ die maximale Anzahl der möglichen Kampfrunden, die der Held am laufenden Tag noch bestreiten kann.

Bemerkung 6.3. Seien die Stärkepunkte des Helden $s_H \in S_H$ zu Beginn des Kampfes fest gewählt. Wenn für die Willenspunkte des Helden $\tilde{w}_H^0, \hat{w}_H^0 \in W_H^0$ zu Beginn des Kampfes gilt $\tilde{w}_H^0 < \hat{w}_H^0$, dann folgt, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten des Helden im Kampf erhöhen und die der Kreatur mindern,

$$P^r_{H:K}(\tilde{w}^0_H, s_H) \leq P^r_{H:K}(\hat{w}^0_H, s_H) \text{ und } Q^r_{H:K}(\tilde{w}^0_H, s_H) \geq Q^r_{H:K}(\hat{w}^0_H, s_H).$$

Bemerkung 6.4. Seien die Willenspunkte des Helden $w^0_H \in W^0_H$ zu Beginn des Kampfes fest gewählt. Wenn für die Stärkepunkte des Helden $\tilde{s}_H, \hat{s}_H \in S_H$ zu Beginn des Kampfes gilt $\tilde{s}_H < \hat{s}_H$, dann folgt, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten des Helden im Kampf erhöhen und die der Kreatur mindern,

$$P^r_{H:K}(w^0_H, \tilde{s}_H) \leq P^r_{H:K}(w^0_H, \hat{s}_H) \text{ und } Q^r_{H:K}(w^0_H, \tilde{s}_H) \geq Q^r_{H:K}(w^0_H, \hat{s}_H).$$

Die aufgestellten Beobachtungen haben wir in Abbildung 6.1 veranschaulicht, in der die Einflüsse der Willens- und Stärkepunkte auf die Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes zwischen einem Zauberer und einem Gor dargestellt sind.

Exemplarisch für die Veranschaulichung des Einflusses der Willenspunkte betrachten wir den Fall, wenn dem Zauberer fünf Kampfrunden zur Durchführung des Kampfes zur Verfügung stehen und er zu Beginn des Kampfes einen Stärkepunkt besitzt. Für die Veranschaulichung des Einflusses der Stärkepunkte betrachten wir den Fall, dass dem Zauberer zwei Kampfrunden zur Durchführung des Kampfes zur Verfügung stehen und er zu Beginn des Kampfes über einen Willenspunkt verfügt.

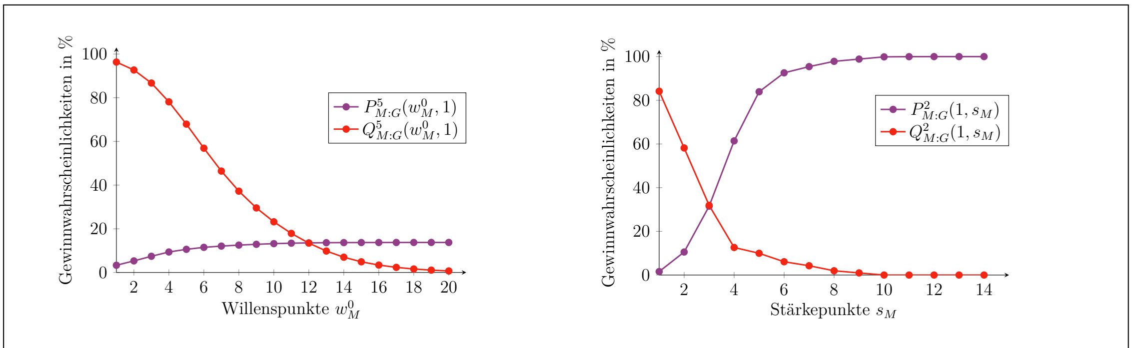

Abbildung 6.1: Einfluss der Willenspunkte und der Stärkepunkte

Zusammenfassend halten wir fest, dass eine höhere Anzahl an Willenspunkten die Gewinnwahrscheinlichkeiten des Helden im Kampf erhöhen und die der Kreatur mindern. Selbiges gilt auch für die Anzahl der Stärkepunkte des Helden. Somit können wir auch festhalten, dass eine Aufwertung der Willenspunkte und Stärkepunkte im Spielverlauf sinnvoll ist.

6.3 Rangordnung der Helden

In diesem Abschnitt untersuchen wir, ob unter gleichen Anfangsbedingungen sich Heldentypen für einen Kampf mit maximal $r \in \{1, \dots, 7\}$ möglichen Kampfrunden besser eignen als andere und ob eine totale Ordnung unter den Helden vorliegt.

Definition 6.5. Seien $H_1, H_2 \in \{D, F, M, B\}$ Helden. In einem Kampf gegen die Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ ist der Held H_1 mindestens genauso gut geeignet wie der Held H_2, wenn für $w^0_{H_1} = w^0_{H_2}$ und $s_{H_1} = s_{H_2}$ gilt

$$P^r_{H_1:K}(w^0_{H_1}, s_{H_1}) \geq P^r_{H_2:K}(w^0_{H_2}, s_{H_2}).$$

Wenn der Held H_1 mindestens genauso gut geeignet ist wie der Held H_2, schreiben wir $H_1 \succcurlyeq H_2$.

Definition 6.6. Seien $H_1, H_2 \in \{D, F, M, B\}$ Helden. In einem Kampf gegen die Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ ist der Held H_1 besser geeignet als der Held H_2, wenn für $w^0_{H_1} = w^0_{H_2}$ und $s_{H_1} = s_{H_2}$ gilt

$$P^r_{H_1:K}(w^0_{H_1}, s_{H_1}) > P^r_{H_2:K}(w^0_{H_2}, s_{H_2}).$$

Wenn der Held H_1 besser geeignet ist als der Held H_2, schreiben wir $H_1 \succ H_2$.

Definition 6.7. Seien $H_1, H_2 \in \{D, F, M, B\}$ Helden. In einem Kampf gegen die Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ ist der Held H_1 genauso gut wie der Held H_2, wenn für $w^0_{H_1} = w^0_{H_2}$ und $s_{H_1} = s_{H_2}$ gilt

$$P^r_{H_1:K}(w^0_{H_1}, s_{H_1}) = P^r_{H_2:K}(w^0_{H_2}, s_{H_2}).$$

Wenn der Held H_1 genauso gut ist wie der Held H_2, schreiben wir $H_1 \sim H_2$.

In den Tabellen E.1 – E.42 im CD-Anhang ist aufgeführt, welcher Held sich unter den gegebenen Anfangsbedingungen eines Kampfes besser eignet als die anderen Helden und unter welchen Anfangsbedingungen die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Helden im Kampf gleich sind.

Die Tabellen E.1 – E.42 im CD-Anhang zeigen, dass keine totale Ordnung unter allen Helden existiert. Welcher Held die größte Gewinnwahrscheinlichkeit bzw. welche Helden gleiche Gewinnwahrscheinlichkeiten im Kampf besitzen, ist abhängig von der maximal zur Verfügung stehenden Kampfzeit, der Anzahl der Stärkepunkte mit denen die Helden den Kampf beginnen sowie ihrer Anzahl an Willenspunkten zu Beginn des Kampfes.

Ausnahmen sind die Helden Krieger und Zwerg, da wir feststellen konnten, dass sich der Krieger im Kampf unter gleichen Kampfbedingungen stets mindestens genauso gut eignet wie der Zwerg ($F \succcurlyeq D$). Dies können wir darauf zurückführen, dass bei gleicher Anzahl an Willenspunkten dem Spieler mit der Spielfigur Krieger stets ein Würfel mehr zur Verfügung steht als dem Spieler mit der Spielfigur Zwerg und so die Wahrscheinlichkeit höhere Würfelwerte zu erzielen größer ist.

Betrachten wir exemplarisch für die Beobachtungen den Kampf gegen einen Gor mit einer maximalen Kampfzeit von drei Kampfrunden und setzen die Stärkepunkte der Helden zu Beginn des Kampfes auf drei. Wenn unter diesen Voraussetzungen alle Helden sechs Willenspunkte besitzen, konnten wir beobachten, dass sich der Zauberer besser eignet als der Bogenschütze, der Krieger und der Zwerg. Haben alle Helden sechzehn Willenspunkte konnten wir feststellen, dass sich alle anderen Helden besser eignen als der Zauberer.

7 Graphen des Spielbrettes

In diesem Kapitel betrachten wir das Spielbrett und überführen dieses in einen Graphen für die Bewegungsmöglichkeiten der Helden und in einen weiteren Graphen für die Laufvorschrift der Kreaturen, um mit diesen Graphen dann in der Simulation die Bewegung der Kreaturen und der Helden nachzubilden.

Da der Gegenstand unserer Betrachtungen die Legende 2 ist, in der die Spielfelder 80 und 83 für die Bewegung der Kreaturen und der Helden nicht relevant sind, werden diese Spielfelder im Folgenden nicht weiter betrachtet.

7.1 Graph der Helden

Für die Nachbildung der freien Bewegungsmöglichkeiten der Helden überführen wir das Spielbrett in einen ungerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten, wobei die Knoten des Graphen die Spielfelder repräsentieren. Zwei Knoten sind benachbart im Graphen, wenn die Spielfelder, die sie repräsentieren, auf dem Spielbrett benachbart sind.

Definition 7.1 (Graph der Helden)**.** Sei $G_H = (V_H, E_H)$ ein Graph auf der Knotenmenge $V_H = \{v_0, v_1, \ldots, v_{72}, v_{81}, v_{82}, v_{84}\}$ mit der Kantenmenge $E_H \subset V_H^2$, so bezeichnen wir G_H als *Graph der Helden.*

Bemerkung 7.2. Der Graph der Helden G_H besteht aus $|V_H| = 76$ Knoten und $|E_H| = 157$ ungerichteten Kanten.

Bemerkung 7.3. Die Nummerierung der Knoten erfolgt in Anlehnung an die Nummerierung der Spielfelder.

7.2 Graph der Kreaturen

Für die Nachbildung der festen Laufvorschrift der Kreaturen überführen wir das Spielbrett in einen gerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten.

Definition 7.4 (Graph der Kreaturen)**.** Sei $G_K = (V_K, E_K)$ ein Graph auf der Knotenmenge $V_K = \{v_0, v_1, \ldots, v_{72}, v_{81}, v_{82}, v_{84}\}$ mit der Kantenmenge $E_K \subset V_K^2$, so bezeichnen wir G_K als *Graph der Kreaturen.*

Bemerkung 7.5. Der Graph der Kreaturen G_K besteht aus $|V_K| = 76$ Knoten und $|E_K| = 75$ gerichteten Kanten.

Bemerkung 7.6. Die Nummerierung der Knoten erfolgt in Anlehnung an die Nummerierung der Spielfelder.

7.3 Adjazenzmatrix der Helden und der Kreaturen

Für die Implementierung der Graphen G_H und G_K, stellen wir die Adjazenzmatrizen dieser Graphen auf. Hierfür verwenden wir die folgende Definition.

Definition 7.7 (Adjazenzmatrix)**.** [1] Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die *Adjazenzmatrix* $A = (a_{ij})_{n\times n}$ von G ist definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i v_j \in E, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 7.8. Bei den implementierten Adjazenzmatrizen müssen wir beachten, dass sich die Nummerierung der Knoten der Graphen G_H und G_K von der Nummerierung der Zeilen und der Spalten der jeweiligen Adjazenzmatrix unterscheidet. Diese Abweichung ist der Nummerierung der Knoten in Anlehnung an die Nummerierung der Spielfelder geschuldet.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} v_0 & \cdots & v_{72} & v_{81} & v_{82} & v_{84} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} v_0 \\ \vdots \\ v_{72} \\ v_{81} \\ v_{82} \\ v_{84} \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,73} & a_{1,74} & a_{1,75} & a_{1,76} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{73,1} & \cdots & a_{73,73} & a_{73,74} & a_{73,75} & a_{73,76} \\ a_{74,1} & \cdots & a_{74,73} & a_{74,74} & a_{74,75} & a_{74,76} \\ a_{75,1} & \cdots & a_{75,73} & a_{75,74} & a_{75,75} & a_{75,76} \\ a_{76,1} & \cdots & a_{76,73} & a_{76,74} & a_{76,75} & a_{76,76} \end{pmatrix} \end{array}$$

Die in Octave implementierten Adjazenzmatrizen können der beigelegten CD entnommen werden.

[1] vgl. [Die10]

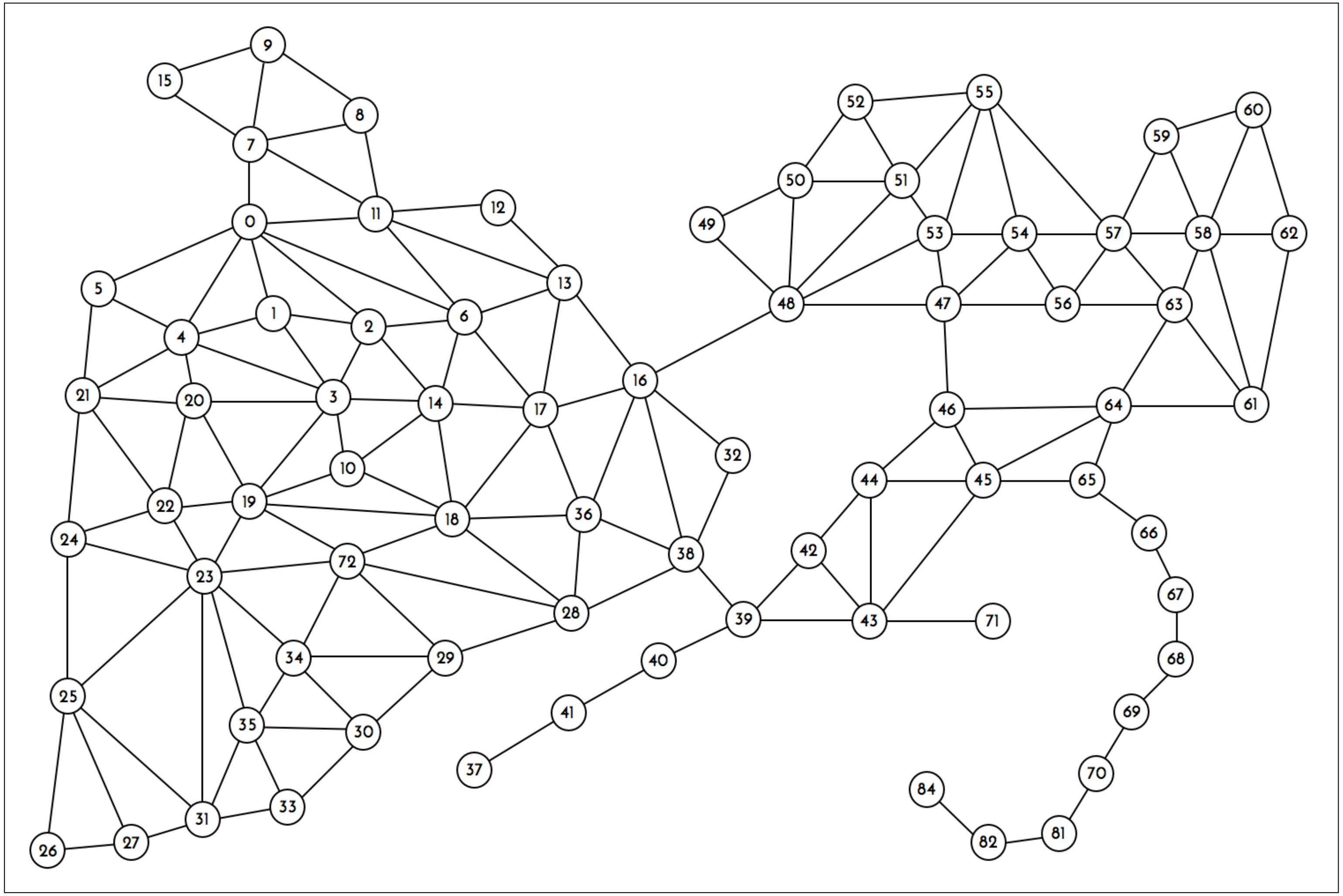

Abbildung 7.1: Graph der Helden $G_H = (V_H, E_H)$

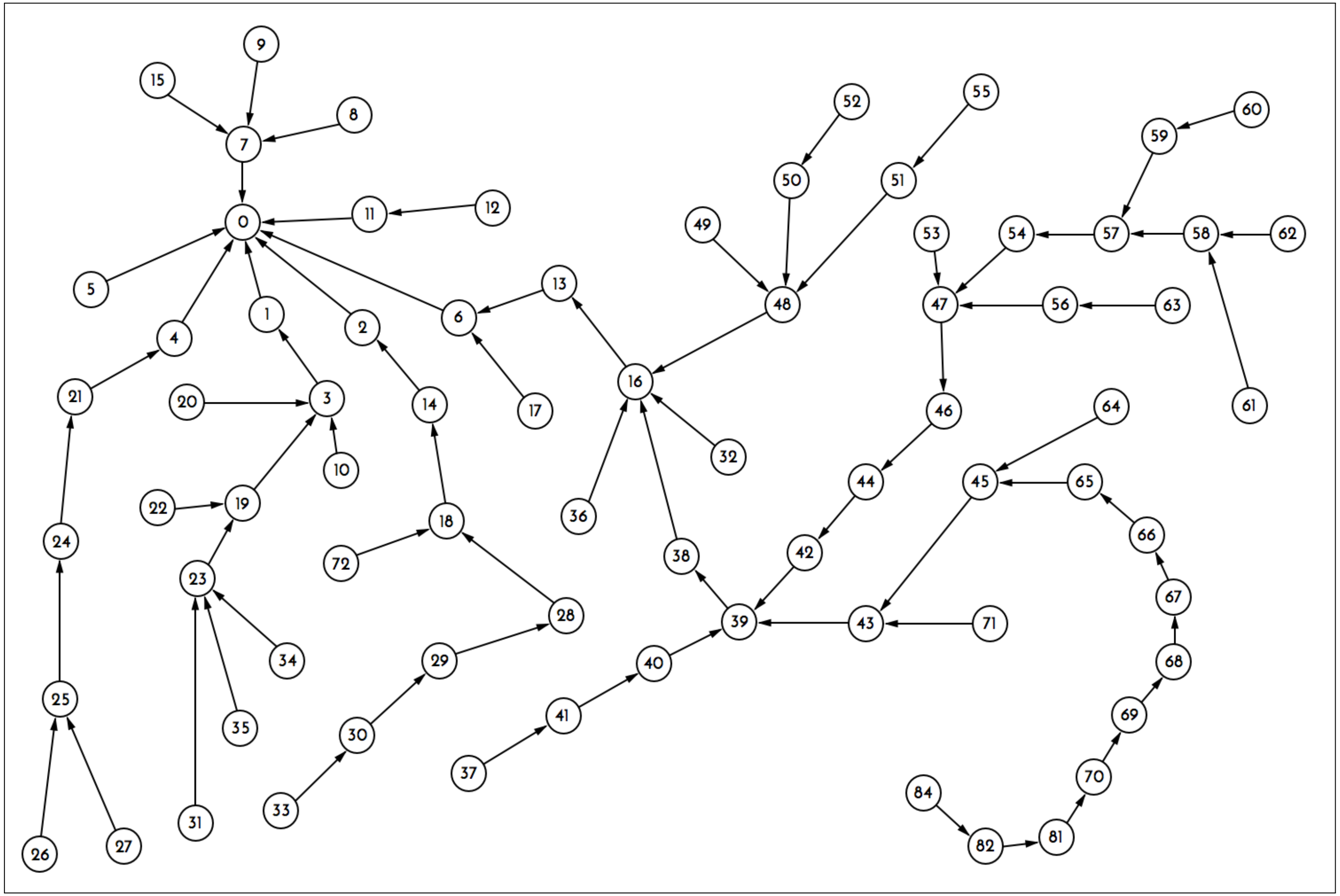

Abbildung 7.2: Graph der Kreaturen $G_K = (V_K, E_K)$

8 Spielsimulation

Aufgrund der Komplexität der Spielabläufe machen wir uns für die weiteren Betrachtungen das Gesetz der großen Zahlen zunutze und führen die weiteren Untersuchungen mit Hilfe von Simulationen durch.

Ziel der Simulation ist, erste Erkenntnisse über die Spielabläufe zu erhalten, auf die wir dann in späteren Betrachtungen aufbauen können. Die Simulation wird in Abhängigkeit der sechs möglichen Heldenkonstellationen in der Zweispielervariante und der fünf möglichen Zeitpunkte der Auslösung der Runensteinkarte durchgeführt, um so in Kapitel 9 Aussagen über den Einfluss der Wahl der Helden und des Zeitpunktes der Auslösung der Runensteinkarte zu ermöglichen.

In diesem Kapitel werden wir die Umsetzung einzelner Spielabläufe in der Simulation betrachten. Die in Octave implementierten Funktionen der Simulation können der beigelegten CD entnommen werden.

8.1 Aufteilung der Goldstücke zu Beginn des Spieles

In der Simulation wird zufällig entschieden wie die fünf Goldstücke zu Beginn des Spieles auf die Gruppe der Spieler verteilt werden, indem wir die Vergabe jedes einzelnen Goldstückes auf die Helden als gleichverteilt ansehen.

Hierfür wird eine ganzzahlige, gleichverteilte Zufallszahl, die die Werte Eins oder Zwei annimmt, mit dem in Octave zur Verfügung stehenden Zufallszahlengenerator erzeugt und danach entschieden welcher Spieler das Goldstück erhält. Ist der Wert der generierten Zufallszahl eine Eins, dann erhält der erste Spieler das Goldstück und bei einer Zwei erhält der zweite Spieler das Goldstück. Dies wird solange ausgeführt bis die fünf Goldstücke auf die Helden aufgeteilt sind.

```
gold = 5;
while (gold > 0)
    randomNumber = randi(2); % generierte Zufallszahl
    if (randomNumber == 1)
        goldHero1 = goldHero1 + 1;
    else
        goldHero2 = goldHero2 + 1;
    end;
    gold = gold - 1;
end;
```

Algorithmus 8.1: Aufteilung der Goldstücke zu Beginn des Spieles

8.2 Bewegung der Helden

Zum momentanen Zeitpunkt verfügen wir noch über zu wenig Informationen bezüglich der Spielvorgänge, so dass uns unter anderem noch keine Aussagen über die gewinnbringenden Wege der Helden bekannt sind. Deshalb gehen wir bei der Bewegung der Helden erst einmal von einer Gleichverteilung über die Nachfolgerknoten aus.

Die Annahme der Gleichverteilung ist zwar naiv, soll uns aber helfen erste Informationen zu den Spielabläufen zu erhalten, die zum Gewinn des Spieles führen.

Um den Fall auszuschließen, dass sich ein Held stets zwischen zwei Spielfeldern hin- und herbewegt, haben wir die Gleichverteilung über die Nachfolgerknoten gewählt und nicht über alle benachbarten Knoten. Damit treffen wir also die Annahme, dass das Ereignis von der jetzigen Position wieder in die vorherige Position zu wechseln das unmögliche Ereignis ist.

Die Bewegung in das vorherige Spielfeld ist nur von den Spielfeldern aus möglich, in denen keine Nachfolgerknoten existieren, wie den Spielfeldern 37, 71 und 84.

Für die Umsetzung verwenden wir die Adjazenzmatrix des Graphen der Helden und ermitteln im ersten Schritt die möglichen Nachfolgerknoten, indem wir die Zeile der jetzigen Position in der Adjazenzmatrix durchlaufen und die Spaltennummern, bei denen der Zeileneintrag gleich Eins ist, in einen Zeilenvektor abspeichern, wobei wir die Spaltennummer, die gleich der vorherigen Position ist, ausschließen.

Danach wird zufällig eine Position aus den möglichen Nachfolgerknoten ermittelt, indem eine ganzzahlige, gleichverteilte Zufallszahl zwischen Eins und der Anzahl der möglichen Nachfolgerknoten erzeugt wird. Als neue Position des Helden wird die Position zurückgegeben, die an der zufällig bestimmten Stelle des Vektors, indem alle möglichen neuen Positionen stehen, abgespeichert ist.

```
for j = 1:size(heroesMatrix,2)
    if ((heroesMatrix(currentPositionHero,j) == 1) & (previousPositionHero ~= j))
        possibleNextPositions = [possibleNextPositions  j];
    end;
end;

randomNumber = randi(length(possibleNextPositions));
nextPositionHero = possibleNextPositions(randomNumber);
```

Algorithmus 8.2: Bewegung der Helden

Die Helden werden solange bewegt, bis sie ihren Tag beendet haben oder bis sie eine Kreatur erreichen oder sich auf einem Händler- oder Brunnenfeld befinden.

8.3 Aktion Kämpfen

Bevor wir auf die Umsetzung einer Kampfrunde eingehen, legen wir fest, wann wir die Auslösung eines Kampfes zwischen einem Helden $H \in \{D, F, M, B\}$ und einer

Kreatur $K \in \{G, S, W\}$ als sinnvoll ansehen. Dies soll verhindern, dass Kämpfe aufgenommen werden, deren Erfolgsaussichten zu gering sind oder der Verlust des Helden sogar sicher ist, um so den Verlust an Zeit und Willenspunkten zu minimieren.

Definition 8.1 (Sinnvoller Kampf)**.** Seien die Willenspunkte des Helden $w_H^0 \in W_H^0$ und die Stärkepunkte des Helden $s_H \in S_H$ zu Beginn des Kampfes fest gewählt. Wir bezeichnen die Ausführung eines Kampfes mit maximal $r \in \{1, \ldots, 7\}$ möglichen Kampfrunden als sinnvoll, wenn für die Gewinnwahrscheinlichkeiten des Kampfes gilt

$$P_{H:K}^r(w_H^0, s_H) \geq \tfrac{1}{3} \text{ und } P_{H:K}^r(w_H^0, s_H) \geq Q_{H:K}^r(w_H^0, s_H).$$

Ein Kampf wird in der Simulation nur ausgeführt, wenn die Ausführung der Aktion Kämpfen sinnvoll ist. Hat ein Held eine Kreatur erreicht gegen die der Kampf nicht sinnvoll ist, wird der Held weiterbewegt, um so einen zusätzlichen Zeitverlust durch einen sinnlosen Kampf zu verhindern.

8.3.1 Gegner des Bogenschützen

Mit der Fähigkeit des Bogenschützen Kreaturen auch in benachbarten Spielfeldern anzugreifen, ist es möglich, dass die Anzahl der potentiellen Gegner größer gleich Eins ist. Deshalb müssen wir eine Entscheidungsregel aufstellen, welche Kreatur er aus der Menge der potentiellen Gegner auswählen soll.

Im ersten Schritt grenzen wir die potentiellen Gegner auf die Kreaturen ein, gegen die ein Kampf sinnvoll ist und speichern sie in einem Vektor ab. Die Reduzierung der möglichen Gegner auf die sinnvollen, erfolgt anhand Definition 8.1.

Wir sehen die Wahl der anzugreifenden Kreatur aus der Menge der möglichen und sinnvollen Gegner als gleichwahrscheinlich an.

Für die zufällige Auswahl wird eine ganzzahlige, gleichverteilte Zufallszahl zwischen Eins und der Anzahl der verbliebenen Gegner generiert. Als Gegner des Bogenschützen wird die Kreatur zurückgegeben, die an der zufällig bestimmten Stelle des Vektors, indem alle möglichen und sinnvollen Gegner stehen, abgespeichert ist.

8.3.2 Ablauf einer Kampfrunde

In einer Kampfrunde bestimmen wir im ersten Schritt die erzielte Differenz der Kampfwerte zufällig, um mit dieser dann die Willenspunkte des Helden und der Kreatur nach der Kampfrunde zu ermitteln. Die Bestimmung der neuen Willenspunkte erfolgt nach den Vorschriften, die in den Bemerkungen 5.20 und 5.21 festgelegt sind.

Für die zufällige Ermittlung der in einer Kampfrunde erzielten Differenz der Kampfwerte machen wir uns die Eigenschaft der über $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsgröße zunutze, dass eine Zufallsgröße mit einer anderen Verteilungsfunktion aus einer über $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsgröße erzeugt werden kann.

Bemerkung 8.2 (Inversionsmethode)**.** Sei X eine diskrete Zufallsgröße mit l Realisierungen $x_1, \ldots, x_l$ und den Einzelwahrscheinlichkeiten $p_i = P(\{X = x_i\})$ für $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Das Intervall $[0,1]$ wird in l Teilintervalle $I_1, \ldots, I_l$ zerlegt, die nach folgender Bildungsvorschrift erstellt werden:

$I_1 := (0, p_1]$,

$\vdots$

$I_i := (p_1 + \ldots + p_{i-1}, p_1 + \ldots + p_i]$ für $i \in \{2, \ldots, l-1\}$,

$\vdots$

$I_l := (p_1 + \ldots + p_{l-1}, 1]$.

Danach erzeugen wir eine gleichverteilte Zufallszahl α und gehen alle Teilintervalle durch, bis wir das Teilintervall $I_{i'}$ gefunden haben, in dem die generierte Zufallszahl α liegt.

Für $\alpha \in I_{i'} = (p_1 + \ldots + p_{i'-1}, p_1 + \ldots + p_{i'}]$ wird dann als Realisierung der diskreten Zufallsgröße X der Wert $x_{i'}$ zurückgegeben.

Diese Methode wird auch als Inversionsmethode bezeichnet.

Da uns die Verteilungen der diskreten Zufallsgröße, die die Differenzen der Kampfwerte beschreibt, bekannt sind, können wir sie mit der Inversionsmethode simulieren. Die mit der Inversionsmethode ermittelte Realisierung geben wir dann in der durchgeführten Kampfrunde als die erzielte Differenz der Kampfwerte zurück.

8.3.3 Wahl der Belohnung

In der Simulation erfolgt die Wahl der Belohnung, die der Held für eine besiegte Kreatur erhält, zufällig. Wir unterscheiden drei Fälle in Bezug auf die aktuelle Anzahl der Willenspunkte des Helden, da die Anzahl der Willenspunkte der Helden auf zwanzig Willenspunkte begrenzt ist.

Im Fall, dass der Held bereits über zwanzig Willenspunkte verfügt, ist die Wahl der zwei Goldstücke als Belohnung sicher, da die weiteren beiden Optionen aufgrund der Begrenzung der Willenspunkte ausgeschlossen sind.

Verfügt der Held über neunzehn Willenspunkte, sehen wir die Wahl zwischen zwei Goldstücken oder einen Willenspunkt und ein Goldstück als Belohnung als gleichwahrscheinlich an. Der Erhalt von zwei Willenspunkten ist in diesem Fall aufgrund der Begrenzung der Willenspunkte ausgeschlossen.

Ist die Anzahl der Willenspunkte des Helden kleiner neunzehn sehen wir die Wahl zwischen den drei möglichen Belohnungsoptionen als gleichwahrscheinlich an.

In den Fällen, in denen mindestens zwei mögliche Belohnungen existieren, wird für die zufällige Auswahl der Belohnung eine ganzzahlige, gleichverteilte Zufallszahl zwischen Eins und der Anzahl der möglichen Belohnungen erzeugt und danach entschieden, welche Belohnung der Held erhält. Für diese Entscheidung werden für die Belohnungen Nummern vergeben, die als Schlüssel fungieren. Der Held erhält dann die Belohnung, deren Schlüssel gleich der generierten Zufallszahl ist.

```
if (willenspunkteHero == 20)
    goldHero = goldHero + 2;
elseif (willenspunkteHero == 19)
    randomNumber = randi(2);
    if (randomNumber == 1)
        goldHero = goldHero + 2;
    else
        goldHero = goldHero + 1;
        willenspunkteHero = willenspunkteHero + 1;
    end;
else
    randomNumber = randi(3);
    if (randomNumber == 1)
        goldHero = goldHero + 2;
    elseif (randomNumber == 2)
        willenspunkteHero = willenspunkteHero + 2;
    else
        goldHero = goldHero + 1;
        willenspunkteHero = willenspunkteHero + 1;
    end;
end;
```

Algorithmus 8.3: Wahl der Belohnung

9 Auswertung der Simulation

Mit der Simulation konnten wir Stichproben bezüglich des diskreten Merkmales, der Dauer des Spieles, generieren. Die möglichen Ausprägungen der Dauer des Spieles sind die erreichten Legendenfelder bzw. erreichten Tage im Spiel. Wir bezeichnen die Ausprägungen mit $a_1, \ldots, a_{14}$ und setzen $a_i = i$ für $i \in \{1, \ldots, 14\}$, wobei i die Anzahl der erreichten Tage angibt.

Die Stichproben wurden in Abhängigkeit der fünf möglichen Zeitpunkte der Auslösung der Runensteinkarte und in Abhängigkeit der sechs möglichen Konstellationen der Helden im Spiel mit zwei Spielern generiert. Für die dreißig möglichen Kombinationen haben wir jeweils 100.000 Simulationsdurchläufe durchgeführt.

Definition 9.1 (Absolute Häufigkeit)**.** Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe vom Stichprobenumfang n. Wir bezeichnen $h_n(a_i)$ als die absolute Häufigkeit der Ausprägung a_i, wobei $h_n(a_i)$ die Anzahl der beobachteten Ausprägung a_i ist.

Definition 9.2 (Relative Häufigkeit)**.** Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe vom Stichprobenumfang n. Wir bezeichnen $r_n(a_i)$ als die relative Häufigkeit und setzen

$$r_n(a_i) = \frac{h_n(a_i)}{n}.$$

Die ermittelten Häufigkeitsverteilungen bezüglich der Spieldauer, für die möglichen Heldenkonstellationen und die möglichen Zeitpunkte für die Auslösung der Runensteinkarte, sind in den Tabellen F.1 – F.5 im CD-Anhang aufgeführt.

9.1 Relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele

Mit den ermittelten Häufigkeitsverteilungen, die in den Tabellen F.1 – F.5 im CD-Anhang aufgeführt sind, lassen sich nun auch Aussagen bezüglich der relativen Häufigkeit der gewonnenen Spiele treffen, die eine Näherung für die Gewinnwahrscheinlichkeit des Spieles ist.

Die Legende gilt unter der Annahme, dass die weiteren legendenabhängigen Aufgaben nicht betrachtet werden, als gewonnen, wenn in der Zweispielervariante bis zum Erreichen des Legendenfeldes N bzw. des vierzehnten Tages höchstens drei Kreaturen in die Burg gelangt sind. Damit ist unsere gesuchte relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele, die relative Häufigkeit der Ausprägung $a_{14} = 14$, die für die Erreichung des vierzehnten Tages steht.

Über alle getesteten Kombinationen haben von insgesamt 3.000.000 Simulationsdurchläufen nur dreizehn Simulationen zum Gewinn des Spieles geführt. Damit geht die relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele insgesamt gegen Null. Selbiges können wir bei der Betrachtung der einzelnen Konstellationen feststellen. Die aufgestellten Häufigkeitsverteilungen zeigen, dass die relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele für alle möglichen Konstellationen entweder Null ist oder gegen Null geht.

Eine mögliche Ursache kann die naive Wahl der Wege der Helden sein, die auf der Annahme der Gleichverteilung der Nachfolgerknoten beruht, so dass zu selten Wege gewählt werden, die zum Erfolg führen. Es kann also passieren, dass sich die Helden sozusagen auf dem Spielbrett verirren. Eine weitere mögliche Ursache kann die Annahme sein, dass der Mehrspieler-Kampf ausgeschlossen ist, so dass die Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn eines Kampfes zu gering sind. Dies wird besonders an den Gewinnwahrscheinlichkeiten in einem Kampf gegen einen Wardrak deutlich. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Held einen Kampf gegen einen Wardrak gewinnt, ist so gering, dass die Ausführung der Aktion Kämpfen alleine nie sinnvoll ist. Somit hat ein einzelner Held keine direkte Möglichkeit einen Wardrak am Eindringen in die Burg zu hindern. Wir können damit feststellen, dass sich auch der kooperative Charakter des Spieles im Spielverlauf, insbesondere im Kampf, widerspiegelt. Wenn die Spieler kooperieren, können im Kampf höhere Kampfwerte erzielt werden und damit auch höhere Gewinnwahrscheinlichkeiten. Dies lässt vermuten, dass die Kooperation der Spieler positive Auswirkungen auf die relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele hat.

In Bezug auf den Zeitpunkt der Auslösung der Runensteinkarte lässt sich ein geringfügiger Unterschied feststellen. Von den insgesamt dreizehn gewonnenen Spielen führten elf Simulationen zum Gewinn des Spieles, wenn die Runensteinkarte auf dem Legendenfeld H ausgelöst wird. Es lässt also vermuten, dass ein späterer Zeitpunkt der Auslösung der Runensteinkarte sich begünstigend auf den Spielausgang auswirkt.

Auffällig ist auch, dass die Heldenkonstellationen „Krieger und Zwerg“ und „Zauberer und Zwerg“ zu allen möglichen Zeitpunkten, an denen die Runensteinkarte ausgespielt werden kann, kein Spiel gewonnen haben. Es lässt also vermuten, dass diese Heldenkonstellationen die schwächsten sind. Dies kann aber auch darauf zurückzuführen sein, dass noch nicht die Wege gefunden wurden, die für diese Heldenkombinationen gewinnbringend sind. Da auch für alle anderen Heldenkonstellationen die relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele gegen Null geht, ist also nur eine Vermutung möglich, die durch weitere Betrachtungen bestätigt werden muss.

9.2 Arithmetisches Mittel der Spieldauer

Definition 9.3 (Arithmetisches Mittel)**.** Sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe vom Stichprobenumfang n. Wir bezeichnen $\bar{X}$ als das arithmetische Mittel und setzen

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

	Auslösung der Runensteinkarte durch Legendenfeld				
	B	D	E	F	H
Bogenschütze und Krieger	3,36625	3,76553	3,94839	4,07284	4,09322
Bogenschütze und Zauberer	3,23269	3,50031	3,64253	3,71507	3,74317
Bogenschütze und Zwerg	2,88555	3,02436	3,11577	3,15159	3,16371
Krieger und Zauberer	3,13203	3,54132	3,66153	3,71325	3,72916
Krieger und Zwerg	2,70138	3,04458	3,08648	3,12109	3,12384
Zauberer und Zwerg	2,52343	2,73637	2,75379	2,77680	2,78059

Tabelle 9.1: Arithmetisches Mittel der Spieldauer

Die arithmetischen Mittel der Spieldauer, die in Tabelle 9.1 aufgeführt sind, zeigen, dass das Spiel im Mittel nach einer kurzen Zeit beendet ist. Auch hierfür kann eine mögliche Ursache die naive Wahl der Wege der Helden sein und insbesondere das Nicht-Eingreifen in den Spielverlauf. Es liegt also nah, dass besonders für die Anfangsphase Strategien entwickelt werden müssen, um die Spieldauer im Mittel zu erhöhen. Hierbei muss unter anderem betrachtet werden, welche Kreaturen zuerst aus dem Spiel genommen werden müssen, um dann die Helden gezielt zu diesen Kreaturen zu führen.

Des Weiteren können wir erkennen, dass im Mittel das Spiel länger dauert, je später die Runensteinkarte ausgelöst wird. Somit können wir festhalten, dass der Schwierigkeitsgrad des Spieles sinkt, je später die Auslösung der Runensteinkarte erfolgt.

Wenn wir die Spieldauer im Mittel für die einzelnen Heldenkonstellationen betrachten, können wir feststellen, dass sie relativ nah beieinander liegen. Nur die Heldenkonstellationen „Bogenschütze und Krieger“ und „Zauberer und Zwerg“ unterscheiden sich geringfügig von denen der anderen. Für einen Bogenschützen und einen Krieger wird im Mittel eine höhere Spieldauer erreicht als mit den anderen Heldenkonstellationen. Wohingegen die Kombination aus Zauberer und Zwerg die geringste mittlere Spieldauer aufweist. Es lässt also vermuten, dass die Konstellation „Bogenschütze und Krieger“ die stärkste Paarung ist und die Kombination „Zauberer und Zwerg“ die schwächste.

Da aber die arithmetischen Mittel der Spieldauer sehr gering sind und für alle möglichen Konstellationen nah beieinander liegen, können wir nur eine Vermutung aufstellen, die durch weitere Betrachtungen bestätigt werden muss.

9.3 Spielverläufe der gewonnenen Spiele

Im diesem Abschnitt betrachten wir die Spielverläufe, die zum Gewinn geführt haben. Die genauen Verläufe sind in den Tabellen G.1 – G.13 im CD-Anhang aufgeführt.

In den gewonnenen Spielen wurden entweder vier oder fünf Bewegungen der Kreaturen durchgeführt, d.h. die Spieler hatten für die Ausführung ihrer Aktionen nur vier oder fünf volle Tage. Dies zeigt, dass der Zeitfaktor eine wichtige Rolle spielt und der Zeitverlust zu minimieren ist.

Auffällig ist, dass in den gewonnenen Spielen immer mindestens eine Aufwertung der Stärkepunkte stattgefunden hat. Damit wird durch die Simulation bestätigt, was wir auch schon am Einfluss der Stärkepunkte auf die Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes erkennen konnten: die Aufwertung der Stärkepunkte ist sinnvoll. Der Erwerb der Stärkepunkte erfolgte stets auf dem Händlerfeld 18.

In zehn von dreizehn gewonnenen Spielen erfolgte auch mindestens eine Aufwertung der Willenspunkte mittels der Brunnenfelder 5 oder 35. Das nicht in jedem Spielverlauf eine Erhöhung der Willenspunkte erforderlich ist, kann z.B. darauf zurückgeführt werden, dass die Helden auch als Belohnung für einen gewonnenen Kampf Willenspunkte erhalten.

Eine sinnvolle Verhaltensregel bezüglich der Erhöhung der Willenspunkte zeigt der in Tabelle G.11 (CD-Anhang) aufgeführte Spielverlauf. Hier erhält der Zwerg einmal zum Ende seines Tages Willenspunkte und noch einmal zu Beginn seines nächsten Tages. So konnte er ohne weiteren Zeitverlust zweimal hintereinander die Anzahl seiner Willenspunkte steigern und so seine Gewinnwahrscheinlichkeiten im Kampf erhöhen.

Auch zeigen die Spielverläufe, dass die Fähigkeit des Bogenschützen, einen Kampf gegen eine Kreatur auf einem benachbarten Spielfeld durchzuführen, von Vorteil ist. Dies wird unter anderem aus dem in Tabelle G.10 (CD-Anhang) aufgeführten Spielverlauf ersichtlich. Hier hat er am neunten Tag eine Position erreicht, von der aus ein Kampf gegen zwei Gors möglich ist. So konnten ohne weiteren Zeitverlust zwei Gors im Kampf besiegt werden.

Ein weiteres sinnvolles Verhalten zeigt der in Tabelle G.9 aufgeführte Spielverlauf, in dem die Bewegung der Kreaturen zum Ende des Spieles durch Ausführung eines Kampfes verhindert wird. Dieses Verhalten ist besonders sinnvoll, wenn bereits drei Kreaturen in die Burg gelangt sind und das Spiel durch eine weitere Bewegung verloren wäre.

Obwohl Kämpfe gegen einen Skral oft möglich gewesen wären, wurden nur in vier von dreizehn gewonnenen Spielen welche durchgeführt. Auffällig war auch, dass die Kämpfe gegen einen Skral erst in der Endphase durchgeführt wurden. Dies deutet daraufhin, dass erst eine Erhöhung der Willens- und Stärkepunkte erforderlich ist.

Da hauptsächlich nur Kämpfe gegen Gors stattgefunden haben, bestätigt die Simulation, was auch schon aus den Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Kampfes ersichtlich war: Skrale sind stärker als Gors.

Bis zum Ende eines Spieles werden neun Gors, drei Skrale und zwei Wardraks auf das Spielbrett gesetzt. Im Mittel haben 8,85 Kämpfe in den gewonnenen Spielen stattgefunden. Damit zeigt die Simulation, dass die Durchführung eines Kampfes gewinnbringend ist und der größte Teil der Kreaturen besiegt werden muss.

Weiterhin haben die Spielverläufe gezeigt, dass nach der zweiten und vor der dritten Bewegung der Kreaturen in sechs von dreizehn gewonnenen Spielen keine Kreaturen im Kampf besiegt wurden. Damit können wir festhalten, dass dieser Zeitraum genutzt werden kann um die Helden in Position zu bringen.

In zwei der gewonnenen Spiele wurden alle neun Gors besiegt und in den anderen elf Spielen acht Gors. Wurden nicht alle Gors im Kampf besiegt, wurde am häufigsten der Gor mit der Startposition 8 nicht angegriffen. Das zeigt also, dass ein Kampf gegen diesen Gor nicht zwingend erforderlich ist.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass wir mit Hilfe der Simulation Informationen zu den erfolgreichen Spielabläufen erhalten haben, die für weitere Untersuchungen als Grundlage dienen.

10 Schlussfolgerung und Ausblick

In dieser Bachelorarbeit haben wir mit dem Modell eines Kampfes und der Simulation eine Grundlage erarbeitet, auf die weiterführende Betrachtungen aufbauen können.

Das die Betrachtung der Gewinnwahrscheinlichkeiten der Kämpfe sinnvoll ist, wird besonders gut im Kampf gegen einen Wardrak verdeutlicht. Wir konnten feststellen, dass ein Kampf gegen einen Wardrak mit nur einem Helden und ohne Gegenstände nie sinnvoll ist. Deshalb raten wir von der alleinigen Durchführung eines Kampfes gegen einen Wardrak ab.

Um höhere Gewinnwahrscheinlichkeiten im Kampf zu erzielen, ist eine Betrachtung der weiteren Bestandteile des Spieles erforderlich. Insbesondere muss der Mehrspieler-Kampf und die Aufwertung durch Gegenstände untersucht werden.

In weiteren Betrachtungen müssen wir die Verteilungen der Differenzen der Kampfwerte in Bezug auf die Gegenstände ermitteln, mit denen wir dann die Gewinnwahrscheinlichkeiten im Kampf berechnen können. Damit ist es uns dann möglich Aussagen über die Eignung eines Gegenstandes zu treffen.

Der gemeinsame Kampf wäre eine weitere Möglichkeit zur Steigerung der Gewinnwahrscheinlichkeiten im Kampf. Deshalb liegt die Vermutung nah, dass mittels des Mehrspieler-Kampfes auch die relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele steigt. Um in der Simulation den Mehrspieler-Kampf gezielt zu ermöglichen, müssen die Spieler zu einem gemeinsamen Gegner geführt werden. Dies können wir erreichen, indem wir die Wege höher wichten die zu einem gemeinsamen Gegner führen, um dann mit Hilfe von gesteuerten Markov-Ketten angemessen zu entscheiden, welchen Weg der Held wählen soll.

Im Vorfeld müssen wir die Verteilungen der Differenzen der Kampfwerte im gemeinsamen Kampf ermitteln. Hiermit ist es uns möglich die Gewinnwahrscheinlichkeiten im Kampf, in Abhängigkeit der Willens- und Stärkepunkte aller am Kampf beteiligten Helden, zu ermitteln. Auch müssen wir dabei die Fähigkeiten einzelner Helden im gemeinsamen Kampf betrachten. Zum Beispiel kann der Zauberer seine Fähigkeit, den Würfel auf die gegenüberliegende Seite zu drehen, auf einen anderen Helden in der Gruppe übertragen. Hierfür müssen sinnvolle Verhaltensregeln aufgestellt werden.

Des Weiteren konnten wir mit der naiven Wahl der Wege der Helden Erkenntnisse über die Spielverläufe erhalten, auf die wir nun aufbauen können. So können wir uns in weiteren Betrachtungen von der naiven Wahl der Gleichverteilung über die Nachfolgerknoten entfernen. Da der Zeitfaktor eine große Rolle im Spiel besitzt, wäre es denkbar die Wahl der Wege der Helden als ein kürzestes Wege Problem aufzufassen.

Ein möglicher Lösungsansatz hierfür wäre der Ameisenalgorithmus[1], der zur näherungsweisen Lösung von kombinatorischen Optimierungsproblemen verwendet werden kann. Auch wären Lösungsansätze basierend auf gesteuerten Markov-Ketten[2] denkbar, mit denen sinnvolle Entscheidungen über die Wahl der nächsten Position, in Abhängigkeit der jetzigen Position und des aktuellen Zeitpunktes, möglich sind.

Des Weiteren wären auch Untersuchungen bezüglich strategischer Auswahlkriterien bei der Wahl des Gegners eines Bogenschützen möglich. Zum Beispiel wäre es denkbar, dass die Kreatur gewählt wird, die in Bezug auf den Spielverlauf am gefährlichsten ist. Ein Kriterium zur Bestimmung des Gefährlichkeitsgrades einer Kreatur wäre z.B. die Länge des Weges, den die Kreatur zurücklegen muss um in die Burg zu gelangen. Die gefährlichste Kreatur ist demnach die Kreatur mit dem kürzesten Weg.

Um den Zeitverlust bei der Ausführung der Aktion Kämpfen weiter zu minimieren, müssen wir in weiteren Betrachtungen den Abbruch eines Kampfes untersuchen. Mit Hilfe der Simulation können wir Kriterien finden, wann ein Kampf vorzeitig beendet werden sollte. Ein mögliches Abbruchkriterium könnte sein, dass Defintion 8.1 auf die im Kampf veränderten Gewinnwahrscheinlichkeiten angewendet wird.

In weiteren Betrachtungen müssen wir auch Untersuchungen bezüglich der Frage anstellen, in wie weit die Schranke für die sinnvolle Ausführung eines Kampfes mit ein Drittel vernünftig gewählt ist. Mit Hilfe der Simulation können wir verschiedene Schranken testen und als Vergleichskriterium die relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele wählen.

Die Simulation des Spieles kann durch die weiteren legendenabhängigen Aufgaben erweitert werden. In der Simulation konnten wir feststellen, dass die Spieler in den gewonnenen Spielen nur vier oder fünf volle Tage für die Ausführung ihrer Aktionen zur Verfügung haben. Damit wird bei der Betrachtung der weiteren Aufgaben die Frage interessant sein, ob sie zeitlich gelöst werden können.

[1] Weiterführende Literatur: [Gra]
[2] Weiterführende Literatur: [PDLDK11]

Literaturverzeichnis

[Bew07] BEWERSDORFF, Jörg: *Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen.* Vieweg Verlag, 2007 (4. Auflage)

[Bos07] BOSCH, Karl: *Basiswissen Statistik: Einführung in die Grundlagen der Statistik mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben mit Lösungen.* Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2007

[Die10] DIESTEL, Reinhard: *Graphentheorie.* Springer Verlag, 2010 (4. Auflage)

[Gra] GRAF, Sabine: *Diplomarbeit: Auswahl und Implementierung eines Ameisenalgorithmus zur Steuerung von Patienten im Planspiel „INVENT“.* `http://sgraf.athabascau.ca/publications/Diplomarbeit_Sabine_Graf.pdf`,

[GT96] GREINER, M. ; TINHOFER, G.: *Stochastik für Studienanfänger der Informatik.* Carl Hanser Verlag München Wien, 1996

[Hen12] HENZE, Norbert: *Stochastik für Einsteiger.* Vieweg+Teubner Verlag, 2012 (9. Auflage)

[Kol08] KOLONKO, Michael: *Stochastische Simulation : Grundlagen, Algorithmen und Anwendungen.* Vieweg+Teubner Verlag, 2008

[NN15] NOS, Karl-Peter ; NOS, Kathrin: *Die Legenden von Andor.* `http://das-spielen.de/index.php/die-legenden-von-andor/`, 2015

[PDG09] PROF. DR. GRECKSCH, Wilfried: *Skript zur Vorlesung “Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“.* 2009

[PDLDK11] PROF. DR. LÖWE, Matthias ; DR. KNÖPFEL, Holger: *Stochastik – Struktur im Zufall.* Oldenbourg Verlag München, 2011

[PDS95] PROF. DR. STROTH, Gernot: *Lineare Algebra.* Heldermann Verlag, 1995

[Reg] *Die Legenden von Andor – Regelkonzept.* `http://www.kosmos.de/_files_media/mediathek/downloads/anleitungen/1811/die_legenden_von_andor.pdf`,

[Sim] *Simulationsgrundlagen.* `http://www.math.uni-frankfurt.de/~numerik/lehre/Vorlesungen/Comp_Fin09/skript/n-shell4.pdf`,

[Ste03] STEINKE, Lennart: *Spieleprogrammierung: Das bhv Taschenbuch.* REDLINE, 2003 (1. Auflage)